Entrainement pour le baccalauréat blanc

Exercice 1:

Asie Juin 2010

PARTIE A - Étude des limites

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

4. Posons $X = -\dfrac{1}{x}$, on a : $f(x) = \dfrac{X^2}{e^X}$. De plus $\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{X^2}{e^X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

5. La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}$ en 0.

PARTIE B - Étude des variations

1. Pour tout réel x non-nul,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{-1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-2x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1) \end{aligned}$$

2. Sur $\mathbb{R}^\star$, $x^4 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe opposé de $2x + 1$ donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

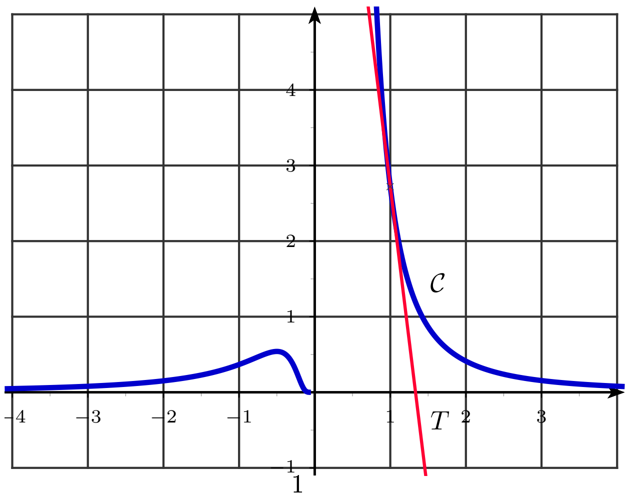
3. $\dfrac{4}{e^2} < 2$ donc $f(x) < 2$ sur $]-\infty; 0[$.
   f est continue et strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $2 \in \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right[$ donc d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.
   On en déduit que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α sur $\mathbb{R}^\star$ et $\alpha \simeq 1,11$

PARTIE C - Représentation graphique

1. L'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ y &= -3ex + 4e \end{aligned}$$

2. $\mathcal{C}$ et T :



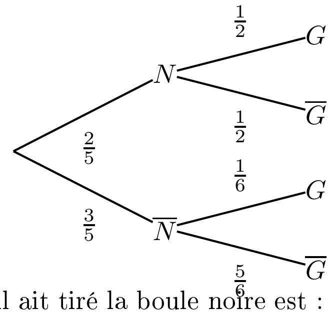
1

Exercice 2:

Polynésie septembre 2010

1. a. A l'aide de l'arbre pondéré ci-dessous et de la formule des probabilités totales, on a :

$$P(G) = P(N \cap G) + P(\overline{N} \cap G) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{10}$$



   b. Le joueur ne gagne pas. La probabilité qu'il ait tiré la boule noire est :

$$P_{\overline{G}}(N) = \frac{P(N \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{10}} = \frac{2}{7}$$

2. a. $X(\Omega) = \{-m; 0; 4-m\}$ et

x_i	$-m$	0	$4-m$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

   b. $E(X) = -m \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{5} + (4-m) \times \frac{3}{10} = \frac{6-4m}{5}$

   c. $E(X) = 0 \Longleftrightarrow m = \frac{3}{2}$

3. Soit $\overline{G}$ l'évènement « on perd n fois de suite à ce jeu », on a $P(\overline{G}) = \left(\frac{7}{10}\right)^n$. De plus, G est l'évènement « on gagne au moins une fois à ce jeu sur les n parties » donc :

$$P(G) \geq 0,999 \Longleftrightarrow 1 - P(\overline{G}) \geq 0,999 \Longleftrightarrow 0,001 \geq \left(\frac{7}{10}\right)^n \Longleftrightarrow ln(0,001) \geq nln\left(\frac{7}{10}\right) \Longleftrightarrow n \geq \frac{ln(0,001}{ln\left(\frac{7}{10}\right)}$$

   Or $\frac{ln(0,001}{ln\left(\frac{7}{10}\right)} \simeq 19,36$

   A partir de $n = 20$, la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à $0,999$.

Exercice 3:

Nouvelle Calédonie Novembre 2010

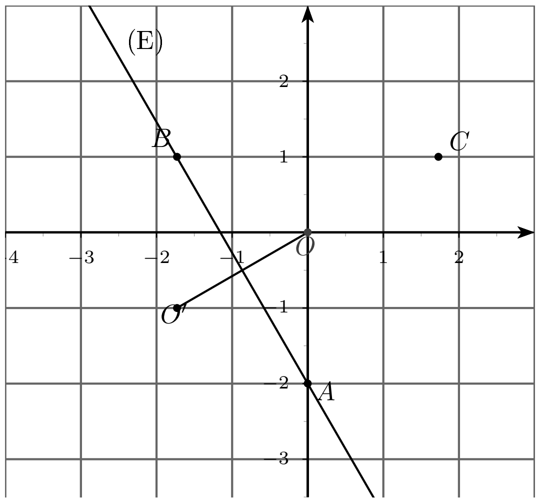
1. a. $arg(z_{\mathrm{A}}) = -\frac{\pi}{2}$ et $|z_{\mathrm{A}}| = 2$ donc $z_{\mathrm{A}} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

   $arg(z_{\mathrm{B}}) = \frac{5\pi}{6}$ et $|z_{\mathrm{B}}| = 2$ donc $z_{\mathrm{A}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

   $arg(z_{\mathrm{C}}) = \frac{\pi}{6}$ et $|z_{\mathrm{C}}| = 2$ donc $z_{\mathrm{A}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

   b. On remarque que$|z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{B}}| = |z_{\mathrm{C}}|$ donc A, B et C appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 2.

   c. Tracer :



2. a. Après calculs, on a : $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et $arg\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ donc $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

   b. $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc en passant au module, on obtient :

$$\left|\frac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| \Longleftrightarrow \frac{|z_{\text{B}} - z_{\text{A}}|}{|z_{\text{C}} - z_{\text{A}}|} = 1 \Longleftrightarrow |z_{\text{B}} - z_{\text{A}}| = |z_{\text{C}} - z_{\text{A}}| \Longleftrightarrow AB = AC$$

   et

$$arg\left(\frac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}\right) = arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}$$

   On en déduit que le triangle ABC est équilatéral.

3. a.

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right| \Longleftrightarrow OM = O'M.$$

   avec $O'(-\sqrt{3} - \mathrm{i})$ donc (E) est la médiatrice du segment $[OO']$.

   b. $AO = AO' = BO = BO' = 2$ donc les points A et B appartiennent à (E).