Corrigé du baccalauréat blanc

Exercice 1: 6 points

Partie A : étude de la fonction $f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1$.

1. Pour tout réel x on a $f(x) = x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$, donc, par opérations sur les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. On a $f(x) = x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Par opérations usuelles sur les dérivées : $f'(x) = 1\mathrm{e}^{x-1} + x \times 1 \times \mathrm{e}^{x-1} = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire : $y = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(x-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1$.
2. Soit $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} O(0\ ;\ 0) \in T_a &\iff 0 = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1 \\ &\iff 0 = \mathrm{e}^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\iff 1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0. \end{aligned}$$

3. – 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2\mathrm{e}^{1-1} = 1 - 1 = 0$.

   – Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = -2x\mathrm{e}^{x-1} - x^2\mathrm{e}^{x-1} = -x(2+x)\mathrm{e}^{x-1}.$$

   $x > 0$, donc $x + 2 > 0$ et par ailleurs $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
   On sait que g est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et s'annule en 1.
   Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$ et de même si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.
   Conclusion : sur $]0\ ;\ +\infty[, g(x) = 0 \iff x = 1$.
4. La tangente cherchée est T_1, elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$

Partie C : calcul d'aire

1. Voir annexe 1.
2. $F'(x) = \alpha e^{x-1} + (\alpha x + \beta)e^{x-1} = (\alpha x + \beta + \alpha)e^{x-1}$ est égale à $x\mathrm{e}^{x-1}$ ssi $\alpha = 1$ et $\beta + \alpha = 0$ i.e. $\beta = -1$.
   Donc $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x = \Big[(x-1)\mathrm{e}^{x-1}\Big]_0^1 = -(-1)e^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
3. Sur $[0\ ;\ 1]$ $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ, donc l'aire $\mathcal{A}$ du domaine considéré est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 (f(x) - 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x\mathrm{e}^{x-1} + 1 - 2x\right)\mathrm{d}x \\ &= I + \int_0^1 (1-2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité)} \\ &= I + \left[x - x^2\right]_0^1 = \frac{1}{\mathrm{e}} + (1-1) \end{aligned}$$

   Finalement : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (en unités d'aire).

Exercice 2: 4 points

1. Voir figure sur l'annexe 2.
2. On a :
$$\frac{b}{a}=\frac{-2-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}=\frac{(-2-\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}=\frac{2+4\mathrm{i}+\mathrm{i}-2}{5}=\mathrm{i}.$$
On en déduit : • $\dfrac{OB}{OA}=\left|\dfrac{b-0}{a-0}\right|=|\mathrm{i}|=1$, d'où $OA=OB$; • $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\dfrac{b-0}{a-0}\right)=\arg(\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$.
Les deux points précédents permettent de conclure que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.
3. (a) L'affixe de C' est : $c'=\dfrac{-3+\mathrm{i}+1-2\mathrm{i}}{-3+\mathrm{i}+2+\mathrm{i}}=\dfrac{-2-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}=\mathrm{i}$ (calcul fait plus haut).

   (b) On a :
$$\begin{aligned}M\in\mathcal{E}&\iff z\neq b\text{ et }|z'|=1\\&\iff z\neq b\text{ et }\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=1\\&\iff M\neq B\text{ et }\frac{AM}{BM}=1\end{aligned}$$
   L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

   (c) $C\in\mathcal{E}$ car $c'=i$, donc $|c'|=1$.
   De même $O\in\mathcal{E}$ car $OA=OB$ (le triangle OAB est isocèle en O). La médiatrice $\mathcal{E}$ n'est donc rien d 'autre que la droite (OC).
4. Soit $J(2+\mathrm{i})$ et $K(-1-3\mathrm{i})$. On note L le milieu de $[JK]$: L a pour affixe $\ell=\dfrac{2+\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$
$[OL]$ est la médiane issue de O du triangle OJK. Montrons que (OL) est perpendiculaire à (AC) :
$\dfrac{0-\ell}{c-a}=\dfrac{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}}{-3+\mathrm{i}+1-2\mathrm{i}}=\dfrac{-1+2\mathrm{i}}{-4-2\mathrm{i}}=\dfrac{(-1+2\mathrm{i})(-4+2\mathrm{i})}{16+4}=\dfrac{0-6i}{20}$
$arg(\dfrac{0-\ell}{c-a})=-\dfrac{\pi}{2}$. Donc $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{LO})=-\dfrac{\pi}{2}$, les droites (OL) et (AC) sont bien perpendiculaires.
(OL) est la hauteur issue de O du triangle OAC.

Exercice 3: 5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissance

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors pour $t>0$ et $h>0$, montrons que :
$$P_{(X\geq t)}\left(X\geq t+h\right)=P\left(X\geq h\right)$$
On a $P(X\geq t)>0$ donc $P_{(X\geq t)}\left(X\geq t+h\right)=\dfrac{P\left((X\geq t)\cap(X\geq t+h)\right)}{P(X\geq t)}$.

Or $(X\geq t)\cap(X\geq t+h)=(X\geq t+h)$
d'où $P_{(X\geq t)}\left(X\geq t+h\right)=\dfrac{P\left(X\geq t+h\right)}{P(X\geq t)}$

De plus pour tout réel $t\geqslant 0$, $\quad P(X\geqslant t)=1-P(X<t)=1-\displaystyle\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=1-\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t=\mathrm{e}^{-\lambda t}$

On a finalement : $P_{(X\geq t)}\left(X\geq t+h\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}\mathrm{e}^{+\lambda t}=\mathrm{e}^{-\lambda h}=P\left(X\geq h\right)$.

Partie B : Durée de vie

1. On a donc $0,2=\displaystyle\int_0^1 0\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\iff 0,2=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^1 0\iff 0,2=-\mathrm{e}^{-10\lambda}+1\iff\mathrm{e}^{-10\lambda}=0,8\iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien $-10\lambda=\ln(0,8)\iff\lambda=\dfrac{\ln(0,8)}{-10}\approx0,0223\approx0,022$ à 10^{-3} près.
2. On a $p(\mathrm{X}>5)=1-p(\mathrm{X}\leqslant5)=1-\displaystyle\int_0^t 0,022\mathrm{e}^{-0,022x}\,\mathrm{d}x=1-\left[-\mathrm{e}^{-0,022x}\right]_0^5=1+\mathrm{e}^{-0,022\times5}-1\approx0,8958\approx0,9$ à 10^{-2} près.
3. Puisqu'on a une loi sans vieillissement : $p_{\mathrm{X}>4}(\mathrm{X}>9)=p_{\mathrm{X}>4}(\mathrm{X}>4+5)=p(\mathrm{X}>5)\approx0,9$.
4. (a) Les temps sont supposés indépendants de durée supérieure ou égale à 5 heures (avec une probabilité égale à 0,9) ou inférieure à 5 heures (avec une probabilité égale à $1-0,9=0,1$).
   La variable Y suit donc une loi binomiale de paramètres $p=0,9$ et $n=10$.

   (b) On a $p(\mathrm{Y}=3)=\binom{10}{3}\times0,9^3\times0,1^{8-3}=56\times0,9^3\times0,1^5\approx0,00001$.

   (c) On a $\mathrm{E(Y)}=n\times p=10\times0,9=9$.

Exercice 4 : Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité **5 points**

1. (a) • Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} 1 + \dfrac{1}{x} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to 0} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, donc finalement $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

   • Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = +1$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$, donc finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   (b) Sur $]0 ~;~ +\infty[$, f somme de composées de fonctions dérivables est dérivable et sur cet intervalle :

   $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}} - 1 = -\dfrac{1}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1 = -\dfrac{1}{x^2 + x} - 1 = \dfrac{-1 - x^2 - x}{x^2 + x}$.

   Comme $x > 0$ implique $x + x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $-1 - x^2 - x = -\left(1 + x + x^2\right)$.

   Or $x > 0 \Rightarrow x + x^2 > 0 \Rightarrow 1 + x + x^2 > 1 > 0$ et finalement $-\left(1 + x + x^2\right) < 0$.

   La négativité stricte de la fonction dérivée sur $]0 ~;~ +\infty[$ implique la décroissance stricte de la fonction f sur cet intervalle.

   (c) On a vu dans les deux questions précédentes que la fonction f est continue et décroit strictement sur $]0 ~;~ +\infty[$ de $+\infty$ à $-\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc une valeur unique α de x appartenant à $]0 ~;~ +\infty[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

   La calculatrice donne $f(0,806) \approx 0,00079$ et $f(0,807) \approx -0,0009$.

   Conclusion : $0,806 < \alpha < 0,807$.

2. (a) Voir l'annexe 1.

   (b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?

   • Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. » NON
   • Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0, 5. » OUI
   • Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. » NON

   (c) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$, la relation $u_{n+1} = g\left(u_n\right)$ entraîne par continuité de la fonction g l'égalité $\ell = g(\ell) \iff \ell = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\ell}\right)$.

   (d) L'égalité précédente s'écrit $\ln\left(1 + \dfrac{1}{\ell}\right) - \ell = 0$, ce qui montre que ℓ est une solution de l'équation $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - x = 0 \iff f(x) = 0$.

   On a vu à la question 1. c. que cette équation a une unique solution dans $]0 ~;~ +\infty[$: α.

   Donc $\ell = \alpha \approx 0,806$

Exercice 4 : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Partie A **Restitution organisée des connaissances**

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul, tels que $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$:
$\exists k, k' \in \mathbb{Z} : a = kn + b$ et $c = k'n + d$
On a $ac = (kn+b)(k'n+d) = n(kd + k'b + kk'n) + bd$ donc $ac \equiv bd \pmod n$.

Partie B **Inverse de 23 modulo 26**

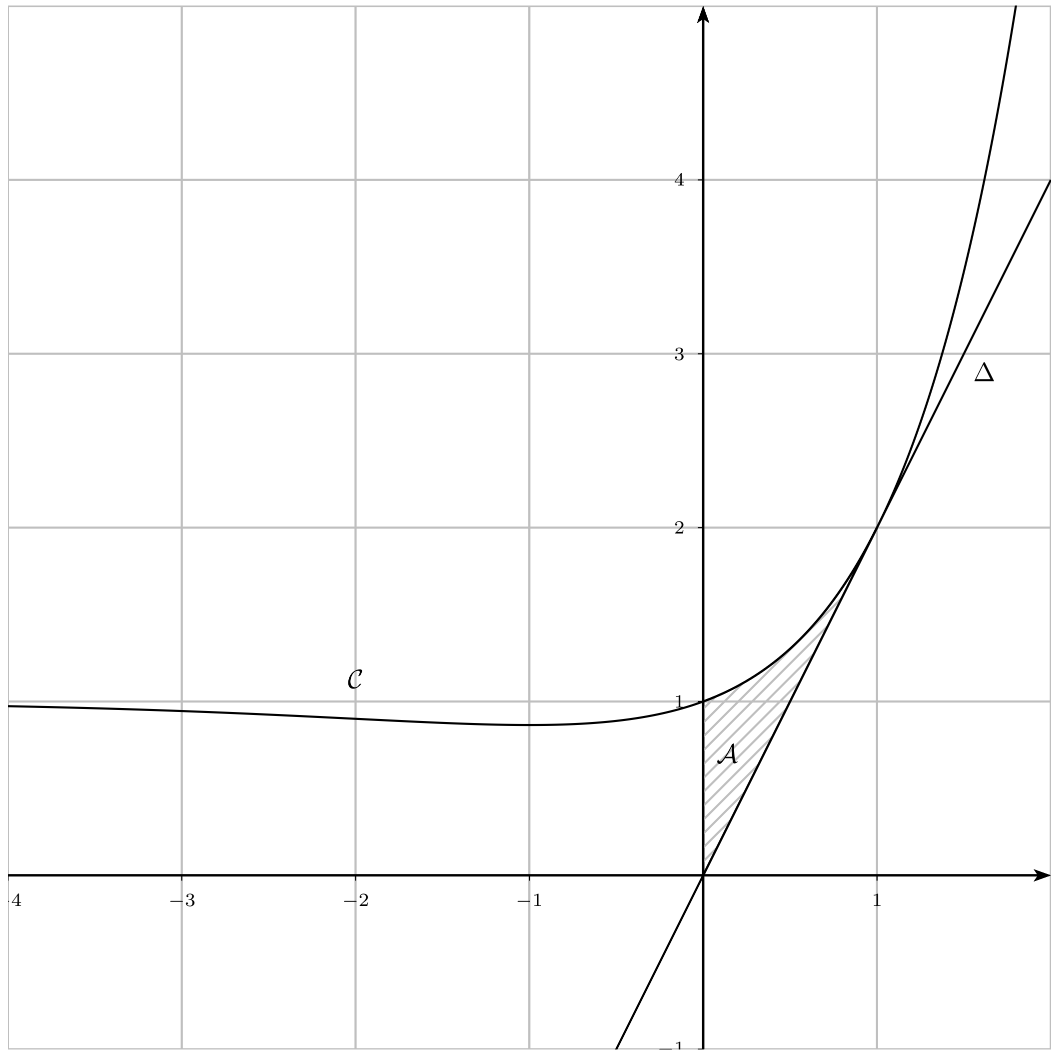
1. $23 \times (-9) - 26 \times (-8) = -207 + 208 = 1$: le couple $(-9\ ;\ -8)$ est solution de l'équation (E).
2. $\left\{\begin{array}{lcl} 23x - 26y & = & 1 \\ 23 \times (-9) - 26 \times (-8) & = & 1 \end{array}\right.$ $\Longrightarrow$ (par différence membre à membre)
   $23(x+9) - 26(y+8) = 0 \iff 23(x+9) = 26(y+8) \quad (1)$
   Donc 23 divise $26(y+8)$ et comme il est premier avec 26 ; il divise $y+8$ (théorème de Gauss) : il existe donc un entier k tel que $y + 8 = 23k \iff y = -8 + 23k$.
   En remplaçant dans (1) $y+8$ par $23k$, on obtient :
   $23(x+9) = 26 \times 23k \iff x + 9 = 26 \iff x = -9 + 26k$.
   Réciproquement les couples $(-9+26k\ ;\ -8+23k)$ vérifient (E) car
   $23(-9+26k) - 26(-8+23k) = -207 + 23 \times 26k + 208 - 26 \times 23k = 1$.
   Les couples solutions de (E) sont donc de la forme : $(-9+26k\ ;\ -8+23k)$, $k \in n\mathbb{Z}$.
3. Il faut trouver un (ou des) couple(s) de premier terme a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$, donc vérifiant :
   $0 \leqslant -9 + 26k \leqslant 25 \iff 9 \leqslant 26k \leqslant 34$. La solution $k = 1$ est évidente ce qui donne $a = -9 + 26 = 17$.
   Donc comme $26b \equiv 0 \pmod{26}$, on a $23 \times 17 \equiv 1 \pmod{26}$.

Partie C **Chiffrement de Hill**

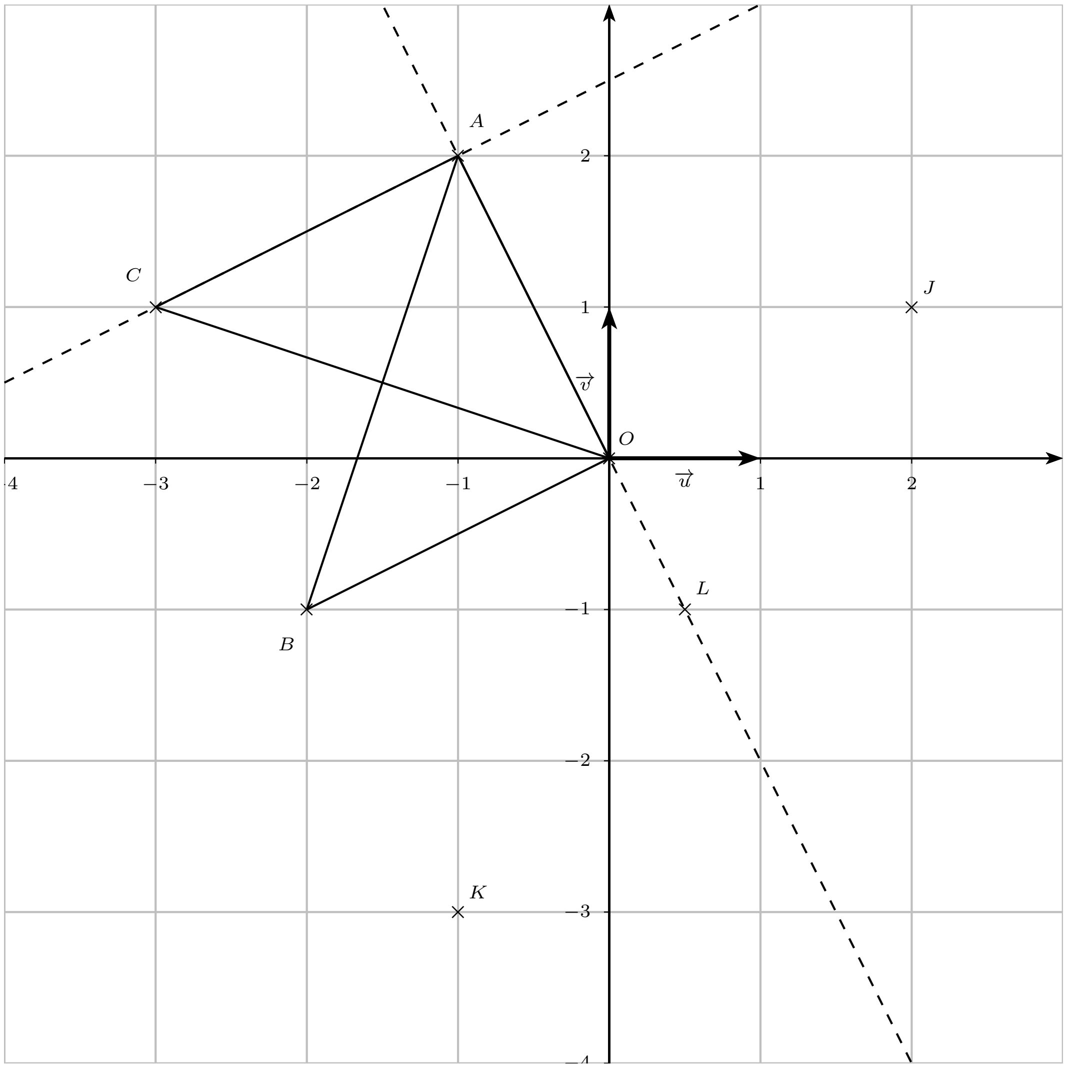
1. $\underbrace{\text{ST}}_{\text{mot en clair}} \overset{\text{étape1}}{\Longrightarrow} (18,\ 19) \overset{\text{étape 2}}{\Longrightarrow} (21,\ 20) \overset{\text{étape 3}}{\Longrightarrow} \underbrace{\text{VU}}_{\text{mot codé}}$
2. (a) $(S_1)\left\{\begin{array}{lcll} y_1 & \equiv & 11x_1 + 3x_2 & \pmod{26} \\ y_2 & \equiv & 7x_1 + 4x_2 & \pmod{26} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} -44x_1 - 12x_2 & = & -4y_1 & \pmod{26} \\ 21x_1 + 12x_2 & = & 3y_2 & \pmod{26} \end{array}\right.$
   $\Rightarrow$ (par somme) $-23x_1 = -4y_1 + 3y_2 \pmod{26}$.
   De même :
   $(S_1)\left\{\begin{array}{lcll} y_1 & \equiv & 11x_1 + 3x_2 & \pmod{26} \\ y_2 & \equiv & 7x_1 + 4x_2 & \pmod{26} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} -77x_1 - 21x_2 & = & -7y_1 & \pmod{26} \\ 77x_1 + 44x_2 & = & 11y_2 & \pmod{26} \end{array}\right.$
   $\Longrightarrow$ (par somme) $23x_2 = -7y_1 + 11y_2 \pmod{26}$ ou encore puisque $-7 \equiv 19 \pmod{26}$:
   $23x_2 = 19y_1 + 11y_2 \pmod{26}$.
   Donc, tout couple $(x_1\ ;\ x_2)$ vérifiant les équations du système (S_1), vérifie les équations du système :
   $$(S_2)\left\{\begin{array}{lcll} 23x_1 & \equiv & 4y_1 + 23y_2 & \pmod{26} \\ 23x_2 & \equiv & 19y_1 + 11y_2 & \pmod{26} \end{array}\right.$$
   (b) On a vu à la partie B que $23 \times 17 \equiv 1 \pmod{26}$ (23 a pour inverse 17 modulo 26), donc en multipliant chaque membre du système (S_2) par 17, on obtient
   $(S_2) \iff \left\{\begin{array}{lcll} 23x_1 \times 17 & \equiv & 4y_1 \times 17 + 23y_2 \times 17 & \pmod{26} \\ 23x_2 \times 17 & \equiv & 19y_1 \times 17 + 11y_2 \times 17 & \pmod{26} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} x_1 & \equiv & 68y_1 + 391y_2 & \pmod{26} \\ x_2 & \equiv & 323y_1 + 187y_2 & \pmod{26} \end{array}\right.$
   Or $68 \equiv 16 \pmod{26}$, $391 \equiv 1 \pmod{26}$, $323 \equiv 11 \pmod{26}$,
   $187 \equiv 5 \pmod{26}$, donc tout couple $(x_1\ ;\ x_2)$ vérifiant les équations du système (S_2), vérifie les équations du système
   $$(S_3)\left\{\begin{array}{lcll} x_1 & \equiv & 16y_1 + y_2 & \pmod{26} \\ x_2 & \equiv & 11y_1 + 5y_2 & \pmod{26} \end{array}\right.$$
   (c) On calcule $11x_1 + 3x_2 = 11(16y_1 + y_2) + 3(11y_1 + 5y_2) = 176y_1 + 11y_2 + 33y_1 + 15y_2 = 209y_1 + 26y_2$.
   Or $209 \equiv 1 \pmod{26}$ et $26 \equiv 0 \pmod{26}$, donc
   $11x_1 + 3x_2 \equiv 1y_1 + 0y_2 \pmod{26}$.
   De même $7x_1 + 4x_2 = 7(16y_1 + y_2) + 4(11y_1 + 5y_2) = 112y_1 + 7y_2 + 44y_1 + 20y_2 = 156y_1 + 27y_2$.
   Or $146 \equiv 0 \pmod{26}$ et $27 \equiv 1 \pmod{26}$, donc
   $7x_1 + 4x_2 \equiv 0y_1 + 1y_2 \pmod{26}$.
   Conclusion : tout couple $(x_1\ ;\ x_2)$ vérifiant les équations du système (S_3), vérifie les équations du système (S_1).
   Finalement les systèmes (S_1) et (S_3) sont équivalents.
   (d) Pour YJ le couple $(y_1\ ;\ y_2) = (24\ ;\ 9)$. En appliquant les équations de (S_3) on obtient :
   $\left\{\begin{array}{lcll} x_1 & \equiv & 16 \times 24 + 9 & \pmod{26} \\ x_2 & \equiv & 11 \times 24 + 5 \times 9 & \pmod{26} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcll} x_1 & \equiv & 393 & \pmod{26} \\ x_2 & \equiv & 309 & \pmod{26} \end{array}\right.$
   Or $393 = 26 \times 15 + 3$, donc $393 \equiv 3 \pmod{26}$;
   $309 = 26 \times 11 + 23$, donc $269 \equiv 23 \pmod{26}$.
   On a donc $(x_1\ ;\ x_2) = (3\ ;\ 23)$ et en utilisant le tableau le mot décodé est donc **DX**.

Nom :	**Prénom** :	**Classe** :
BAC BLANC 26/03/2013		
À rendre avec la copie		

ANNEXE 1 : Exercice 1



ANNEXE 2 : Exercice 2



ANNEXE 3 : Exercice 4