Chapitre 10: Loi à densité

1 Lois de probabilité à densité

1.1 Introduction

En première, on a introduit la notion de variable aléatoire X sur des ensembles Ω finis. Pour définir la loi de la variable aléatoire X, il nous suffisait de donner $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ et de déterminer $P(X = x_k)$ pour $k \in [1; n]$. Par exemple, si on considère l'expérience suivante :

Un joueur lance deux fois une pièce équilibrée ; il gagne 2 euros par « pile »obtenu et perd 1 euro par « face »obtenu. On modélise l'expérience grâce à l'univers $\Omega = \{2P\ ;\ 1F1P\ \ 2F\}$ et la loi de probabilité :

Issue	$2P$	$1F1P$	$2F$
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La variable aléatoire X qui à chaque issue associe le gain algébrique correspondant du joueur est définie par $X(\Omega) = \{-2; 1; 4\}$ et :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On considère l'expérience suivante :
On tire sur une cible circulaire de 1 mètre de rayon sans jamais la manquer.
La variable aléatoire X qui indique la distance, en mètre, du point d'impact au centre prend toutes les valeurs de $[0; 1]$.

Dans ces conditions, il n'est plus possible de définir la loi de X en dressant le tableau des probabilités de chacun des événements $X = x_i$ puisqu'il y en a une infinité. Une autre approche est alors nécessaire. On va donc s'intéresser aux événements du type « X prend ses valeurs dans J »noté « $X \in J$ ». Il s'agit alors de définir la probabilité de $P(X \in J)$.

Dans notre exemple, $P(X \notin [0; 1]) = 0$ donc on pour déterminer la loi de X, on cherchera à déterminer $P(X \in [0; r]) = P(X \leq r)$ avec $r \in [0; 1]$.

1.2 Variable aléatoire suivant une loi à densité

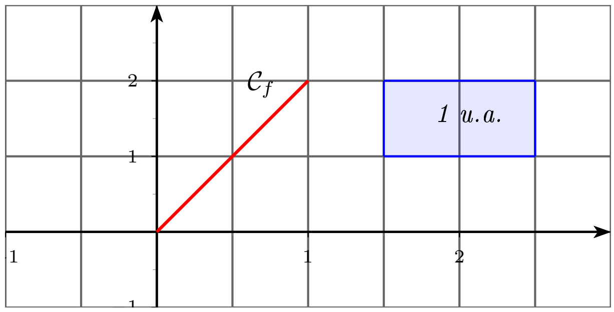
Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle (borné ou non) de $\mathbb{R}$.

Définition:
*On appelle **densité de probabilité sur** I toute fonction définie sur I telle que :*

- *f est continue (sauf en un nombre fini de points) et positive sur I ;*
- *l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ est égale à 1 u.a.*

Exemple:
Dans l'exemple de la cible, on a $I = [0; 1]$ et on admet que X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0; 1] \\ 0 & si \quad x \notin [0; 1] \end{cases}$$

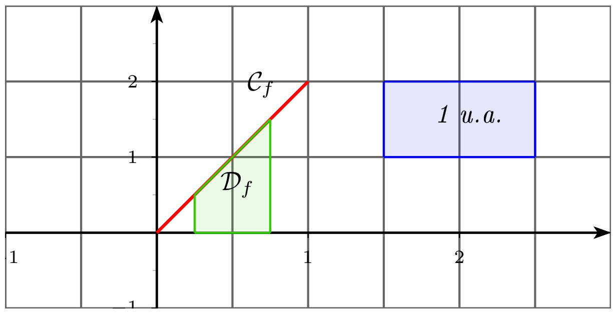


Définition:
f désigne une densité de probabilité définie sur I. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi de densité f signifie qu'à tout intervalle $J \subset I$, on associe la probabilité :

$$P(X \in J) = \texttt{aire}\,(\mathcal{D}_f)$$

où $\mathcal{D}_f$ est le domaine sous la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle J.

Exemple:
Pour déterminer la probabilité que la flèche soit arrivée à une distance comprise entre $0,25$ et $0,75$ mètre du centre, on calcule l'aire sous la courbe entre $0,25$ et $0,75$ soit :



On a donc

$$\begin{array}{rcl} P(X \in [0,25;075]) & = & \displaystyle\int_{0,25}^{0,75} 2x\mathtt{d}x \\ & = & \left[x^2\right]_{0,25}^{0,75} \\ & = & 0,5 \end{array}$$

Attention, si on cherche à déterminer $P(X = 0,25)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} P(X = 0,25) & = & \displaystyle\int_{0,25}^{0,25} 2x\mathtt{d}x \\ & = & \left[x^2\right]_{0,25}^{0,25} \\ & = & 0 \end{array}$$

Ainsi, la probabilité que X prenne une valeur isolée de l'intervalle $[0;1]$ est nulle et cela se généralise pour toutes les variables aléatoires suivant une loi à densité. On en déduit donc que pour toutes les variables aléatoires suivant une loi à densité :

$$P(X \leq a) = P(X < a)$$

Remarque:
Pour tout intervalle $J \subset I$, on a $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$

2 Loi uniforme

Définition:
Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante sur $[a;b]$ de valeur $\dfrac{1}{b-a}$.

Propriété:
Pour tout intervalle $[c;d] \subset [a;b]$, $P(X \in [c;d]) = \dfrac{d-c}{b-a}$

Définition:
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle fermé $[a;b]$ est :

$$E(X)=\int_a^b xf(x)\mathtt{d}x$$

Théorème:
X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$. Son espérance mathématique est $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

3 Lois exponentielles

Définition:
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, alors :

- *pour tout $t\in[0\ ;\ +\infty[$:*
$$P(X\leqslant t)=1-e^{-\lambda t}.$$
- *En utilisant l'événement contraire, $P(X>t)=1-P(X\geq t)=1-(1-e^{-\lambda t})=e^{-\lambda t}$.*
- *Pour tout a et b positifs, $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(X\leqslant b)-P(X\leqslant a)$;*

Théorème:
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$P_{X\geq t}\left(X\geq t+h\right)=P\left(X\geq h\right)$$

On dit que une loi exponentielle est sans vieillissement ou sans mémoire.

Démonstration:
Soit $t>0$ fixé et $h>0$, la probabilité que $X\geq t+h$ sachant que $X\geq h$ est égale à :

$$\begin{aligned}P_{X\geq t}(X\geq t+h) &= \frac{P((X\geq h)\cap(X\geq t+h))}{P(X\geq t)}\\ &= \frac{P(X\geq t+h)}{P(X\geq t)}\\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}\\ &= e^{-\lambda h}\\ &= P(X\geq h).\end{aligned}$$

Définition:
L'espérance mathématique (lorsqu'elle existe) d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle $[0;+\infty[$ est :

$$E(X)=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xf(x)\mathtt{d}x$$

Théorème:
X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Son espérance mathématique est $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

Démonstration:
Soit $I(t)$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $I(t)=\displaystyle\int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}\mathtt{d}x$.
Posons $u'(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ et $v(x)=x$. On a alors $u(x)=-e^{-\lambda x}$ et $v'(x)=1$. De plus, u et v sont continues, dérivables et de dérivées continues sur $[0;+\infty[$ donc on peut effectuer une intégration par parties et :

$$\begin{aligned}I(t) &= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^t-\int_0^t -e^{-\lambda x}\mathtt{d}x\\ &= -te^{-\lambda t}-\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^t\\ &= -te^{-\lambda t}-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

De plus, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}-\lambda te^{-\lambda t}=0$ pour $\lambda>0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}e^{-\lambda t}=0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}I(t)=\frac{1}{\lambda}$