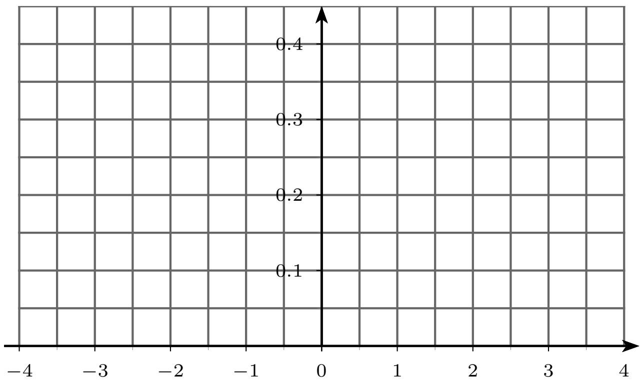
Introduction à la loi normale centrée réduite

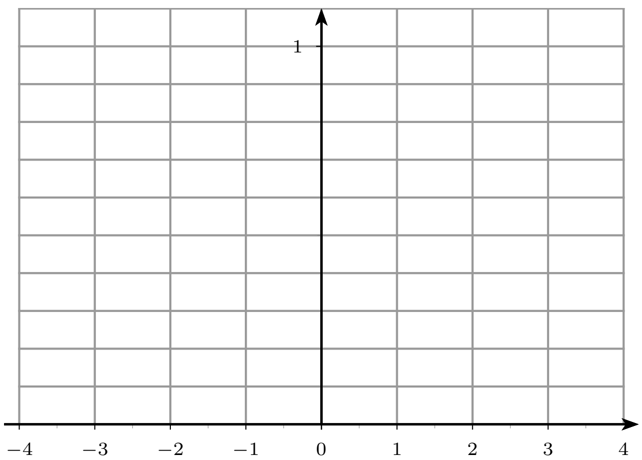
Définition:
Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ si X admet pour densité $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exercice 1:
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On va déterminer dans cette exercice quelques propriétés de la fonction f qui vont nous donner des informations sur X :

1. Tracer la courbe de la fonction f dans le repère ci-dessous :



2. Montrer que f est bien une densité (On vérifiera à la calculatrice que l'aire sous la courbe de la fonction f est égale à 1).
3. Montrer que f est paire.
4. En déduire $P(X \geq 0)$ et $P(X \leq 0)$.
5. Tracer la courbe de la fonction $\Phi(x) = P(X \leq x)$ dans le repère ci-dessous :



   Φ s'appelle la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
6. Exprimer en fonction de $\Phi(x) = P(X \leq x)$ les probabilités $P(X \leq -x)$, $P(X \geq x)$ et $P(-x \leq X \leq x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
7. Déterminer $P(-1 < X < 1)$, $P(-2 < X < 2)$ et $P(-3 < X < 3)$.

Exercice 2:
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On va dans cet exercice démontrer le théorème suivant :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un **unique** nombre strictement positif u_α tel que :

$$P\left(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

1. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $P\left(-x \leq X \leq x\right) = 1 - \alpha \Longleftrightarrow \Phi(x) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$
2. Déterminer les variations de Φ sur $]0;+\infty[$.
3. Conclure.
4. Déterminer $u_{0,05}$ et $u_{0,01}$. Interpréter graphiquement ces deux valeurs.