

Introduction à la loi normale standard

Définition:

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ si la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ où σ est un réel strictement positif.

Exercice 1:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. On rappelle que pour une variable aléatoire Y admettant une espérance et une variance, on a : $E(aY + b) = aE(Y) + b$ et $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$. On pose à présent $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

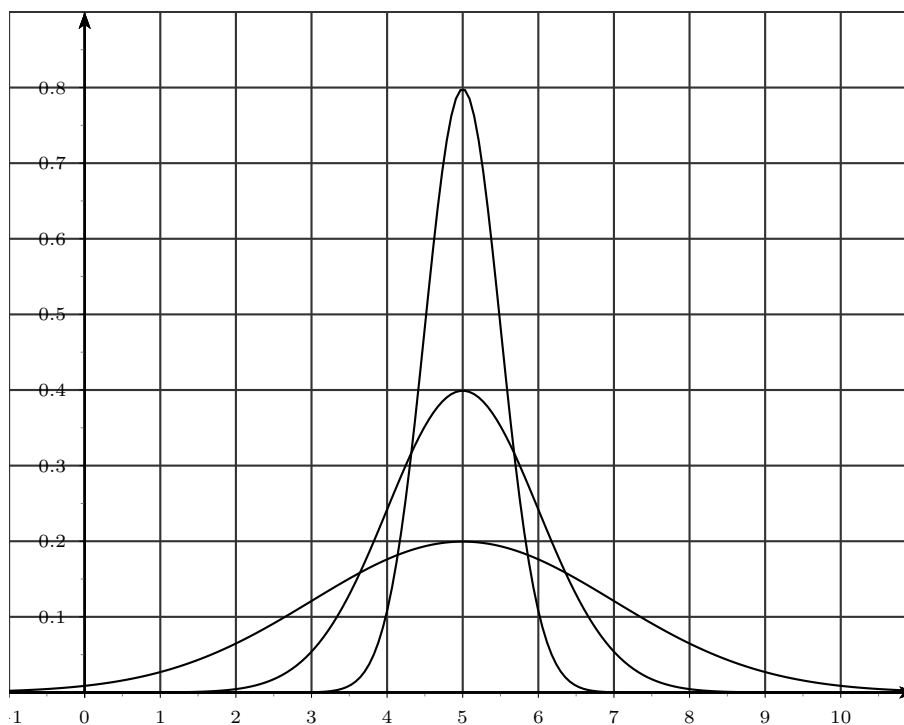
1. Déterminer l'espérance de $E(Z)$. En déduire $E(X)$.
2. Montrer que $V(Z) = E(Z^2)$ puis exprimer X en fonction de Z . En déduire $V(X)$.

Exercice 2:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Sa densité est donnée par :

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1. On a tracer les courbes des fonctions $f_{5, \frac{1}{2}}$, $f_{5, 1}$ et $f_{5, 3}$ dans le repère ci-dessous :



Identifier pour chaque fonction sa courbe représentative.

2. Donner des propriétés de la courbe de $f_{\mu, \sigma}$ en fonction de μ et σ .

Exercice 3:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Déterminer :

1. $P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma])$
2. $P(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 3\sigma])$
3. $P(X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma])$