Chapitre 14: Géométrie vectorielle

1 Vecteurs de l'espace

La définition d'un vecteur dans l'espace est la même que celle dans le plan. Ainsi, pour tous points A et B distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par :

- sa direction, celle de la droite (AB) ;
- son sens, celui de A vers B ;
- sa norme, notée $||\overrightarrow{AB}||$, qui est la distance AB.

Toutes les règles de calcul vues dans le plan ainsi que la relation de Chasles sont valables dans l'espace.

On définit de même la colinéarité dans l'espace comme dans le plan. Deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$. Les conséquences sur le parallélisme et les alignements sont conservées, ainsi :

Propriété:
$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

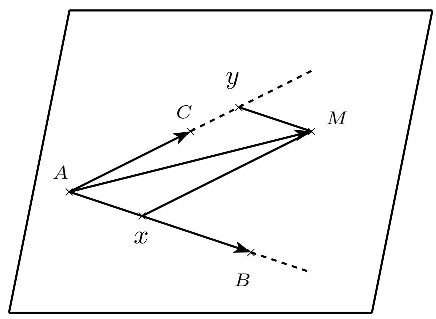
Propriété:
Trois points distincts de l'espace A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2 Vecteurs coplanaires

Théorème:
A, B et C sont trois points non-alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M définis par

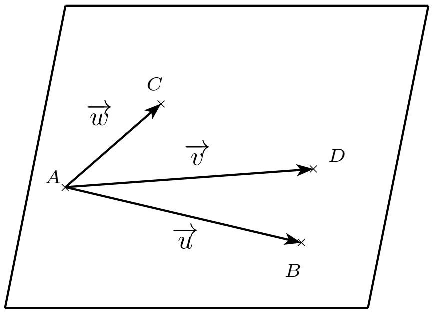
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.



Remarque:
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC). Ainsi pour définir un plan $\mathcal{P}$, il suffit de se donner un point et deux vecteurs non-colinéaires de ce plan.

Définition:
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si lorsqu'on choisit un point A quelconque, les points B, C et D tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ sont dans un même plan.



Remarque:
Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, les trois vecteurs sont nécessairement coplanaires. Ils appartiennent au plan dirigé par $\overrightarrow{u}$ (ou $\overrightarrow{v}$) et $\overrightarrow{w}$.

Théorème:
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$

On en déduit les propriétés suivants :

Propriété:
- *A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.*
- *Les droites (AB) et (CD) sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.*
- *les plans (ABC) et (DEF) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.*

3 Repérage dans l'espace

Un repère de l'espace est composé d'un point O (appelé origine du repère) et un triplet $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de vecteurs non-coplanaires. On note $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ ce repère et on dit que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de vecteurs de l'espace.

Théorème:
$\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres $(x; y; z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Définition:
$\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère de l'espace. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. Par définition, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées $(x; y; z)$ de M et $\overrightarrow{u}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Remarque:
Tous les calculs sur les coordonnées de la géométrie plane s'étendent à l'espace par l'ajout d'une troisième coordonnée.

Théorème:
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs non-coplanaires de l'espace. Pour tout vecteur $\overrightarrow{m}$, il existe un unique triplet de nombres $(x; y; z)$ tel que :

$$\overrightarrow{m} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$$

$(x; y; z)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{m}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

4 Représentation paramétrique

Dans ce paragraphe, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormée $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

4.1 Représentation paramétrique d'une droite

Propriété:
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
Un point M appartient à la droite $\mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

On dit que ce système est une représentation paramétrique (de paramètre t) de la droite $\mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$.

Démonstration:
$M(x; y; z) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{array}\right. .$$

Exemple:
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(4; 5; 6)$.
On veut savoir si le point $B(-3; -3; -3)$ appartient à $\mathcal{D}$.

- *La représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :*

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{array}\right. .$$

- *$B \in \mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que*

$$\left\{\begin{array}{l} -3 = 1 + 4t \\ -3 = 2 + 5t \\ -3 = 3 + 6t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4 = 4t \\ -5 = 5t \\ -6 = 6t \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1.$$

Ainsi, $B \in \mathcal{D}$.

4.2 Représentation paramétrique d'un plan

Propriété:
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point, $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$ deux vecteurs non-colinéaires de l'espace.
Un point M appartient au plan $\mathcal{P}(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + ta + s\alpha \\ y = y_A + tb + s\beta \\ z = z_A + tc + s\gamma \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \quad \texttt{et} \quad s \in \mathbb{R}$$

On dit que ce système est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Démonstration:
$M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ si et seulement s'il existe t et s tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - x_A = ta + s\alpha \\ y - y_A = tb + s\beta \\ z - z_A = tc + s\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x_A + ta + s\alpha \\ y = y_A + tb + s\beta \\ z = z_A + tc + s\gamma \end{array}\right. .$$