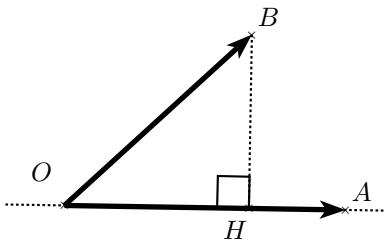
Chapitre 16: Produit scalaire

1 Produit scalaire dans le plan

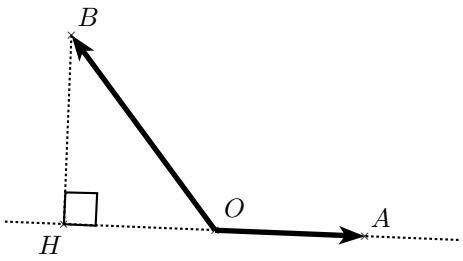
Dans ce paragraphe, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition:
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non-nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. $\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

$\vec{u}.\vec{v} = OA \times OH$



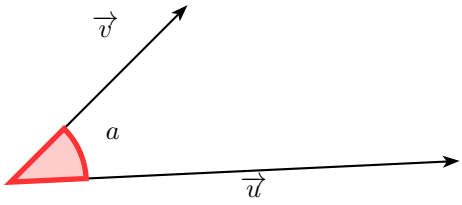
$\vec{u}.\vec{v} = -OA \times OH$



Définition:
Pour tous vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\alpha)$$

où α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.



Définition:
Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère orthonormal, alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque:
Si $\vec{u}(x; y)$ alors $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2$ et comme $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$, on a :

$$\vec{u}^2 = ||\vec{u}||^2$$

Définition:
Pour tous vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Propriété:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriété:
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel k :

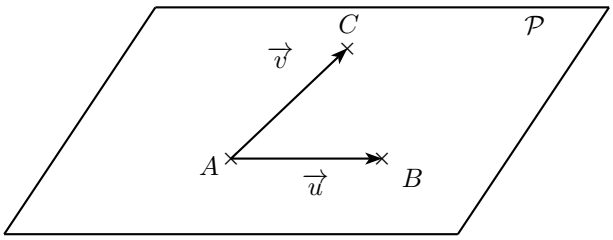
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(k\,\vec{u}).\vec{v} = k\,(\vec{u}.\vec{v})$

2 Produit scalaire dans l'espace

Dans ce paragraphe, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2.1 Définition

Définition:
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.
$\vec{u} \cdot \vec{v}$, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{P}$.



Propriété:
Toutes les propriétés vues sur le produit scalaire dans le plan sont encore valables dans l'espace.

2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété:
Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Remarque:
Soit A et B deux points de l'espace, comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ c'est à dire $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, on retrouve la formule de la distance :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

3 Orthogonalité dans l'espace

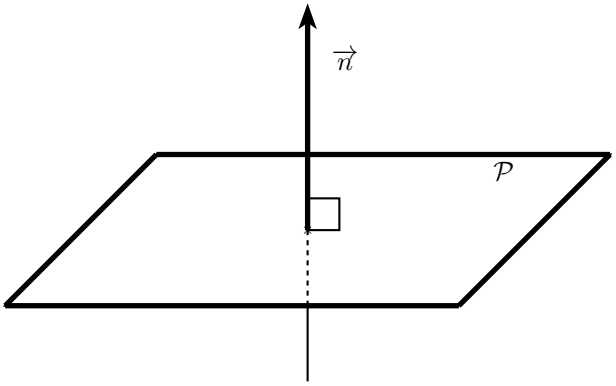
3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition:
Deux vecteurs de l'espace sont dits orthogonaux si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont orthogonales.

Propriété:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

3.2 Vecteur normal à un plan

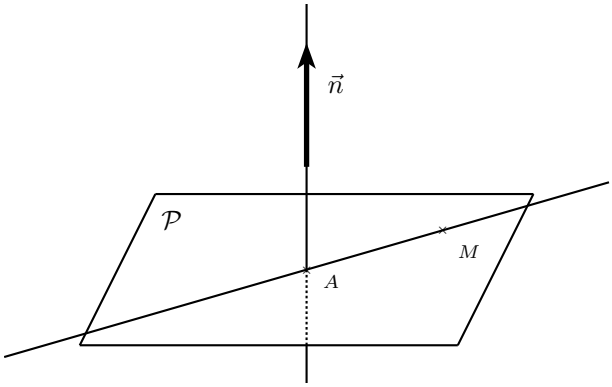
Définition:
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur formé par deux points de $\mathcal{P}$



3.3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition:
Le plan $\mathcal{P}$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$



Propriété:
Si une droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$ alors elle est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Démonstration:
Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes en A du plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
Ces vecteurs sont non-nuls et non-colinéaires donc le plan $\mathcal{P}$ est définie par A, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Ainsi pour toute droite d du plan $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{v}$, il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$$

Δ est orthogonale à d_1 et d_2 donc son vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ soit $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$ donc

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \cdot \vec{n} = a\vec{u}_1 \cdot \vec{n} + b\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$$

donc Δ est orthogonale à d. (CQFD)

3.4 Équation cartésienne d'un plan

Théorème:
Dans un repère orthonormé :

- *Si $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$;*
- *Si a, b et c sont trois nombres réels non tous nuls alors l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.*

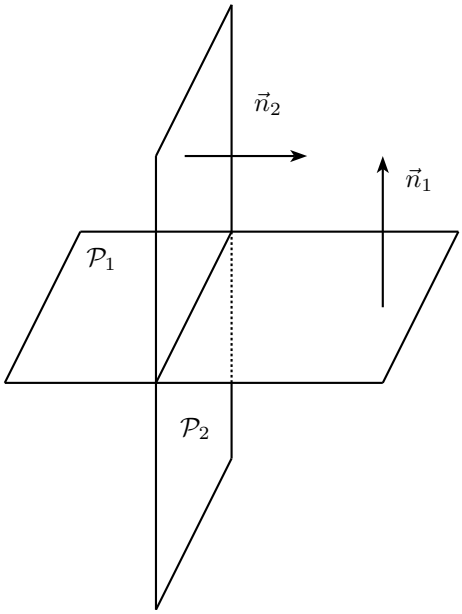
Démonstration:
- *Si $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ alors $\vec{n}$ est non-nul. Soit $A(x_0;y_0;z_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donc :*

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz + d = 0$$

avec $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Ainsi $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
- *Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b et c sont trois nombres réels non tous nuls. Supposons $a \neq 0$ alors le point $A\left(\dfrac{-d}{a};0;0\right) \in \mathcal{E}$ et*

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = ax + by + cz + d = 0$$

Ainsi $M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donc $\mathcal{E}$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

3.5 Plans perpendiculaires

Définition:
Deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont dits perpendiculaires si leurs vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ sont orthogonaux soit si $\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2 = 0$