Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 2 et de terme premier terme $u_0 = \dfrac{1}{3}$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Conclure
4. Déterminer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Conclure
6. Réaliser la même étude pour la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $\dfrac{2}{3}$ et de terme premier terme $u_0 = 4$.

Exercice 2:
Calculer les sommes suivantes :

- $2+4+6+8+\cdots+1902$
- $2+4+8+16+\cdots+4096$
- $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots$

Exercice 3:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n^2$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Conclure

Exercice 4:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$ est géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Conclure
4. Déterminer S_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et conclure

Exercice 5:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4-u_n} \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n}$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Conclure

Exercice 6:
Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

- $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+...+n)^2$