Convergence des suites monotones

Exercice 1:
Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{4n-4}{n^2+3}$ est bornée.

Théorème: (admis)
- *Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.*
- *Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.*

Exercice 2:
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n+5}$.

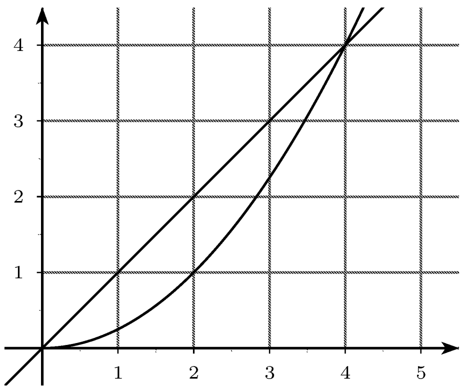
1. À l'aide de la calculatrice, observer le comportement de cette suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n > 0$.
3. Démontrer que la suite est décroissante.
4. Conclure.

Théorème: (Hors programme depuis peu...)
Soit f une fonction continue sur I et à valeur dans I. Si la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l et si $u_0 \in I$ alors la limite l vérifie :

$$f(l) = l$$

Exercice 3:
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n^2$.

1. On a tracé ci-dessous la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{4}x^2$ et la droite d'équation $y = x$. Placer u_0, u_1, u_2 et u_3.



2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 3$
3. Étudier le sens de variations de la suite (u_n).
4. (u_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 4:
Démontrer le théorème ci-dessous :
Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 5:
Démontrer le théorème ci-dessous :
Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite l alors pour tout entier naturel n, $u_n \leq l$.

Exercice 6:
La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{8u_n+3}{u_n+6}$.

1. Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{8x+3}{x+6}$ sur $[1; 3]$.
2. Démontrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 3$ pour $n \geq 1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. (u_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.