Limites et comparaisons

Exercice 1:
Démontrer le théorème suivant :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait :

$$u_n \leq v_n$$

alors si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

Exercice 2:
Déterminer dans chaque cas, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = n^2 + (-1)^n n$
2. $u_n = \dfrac{2n+3}{cos(n) + n}$
3. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$
4. $u_n = 3 + \dfrac{sin(1+n^2)}{n}$ (pour $n > 0$)

Exercice 3:
Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que pour tout entier n, $(1+a)^n \geq 1 + na$

Exercice 4:
Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ pour $q > 1$.