Chapitre 1: Suites

1 Limite d'une suite

1.1 Limite finie

Définition:
On dit que la suite (u_n) a pour limite le nombre réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes d'une suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$.

Pour $h = 0,4$, tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = 3$ sont compris dans l'intervalle $]2 - 0,4; 2 + 0,4[=]1,6; 2,4[$.

Ainsi, quelque soit $h > 0$, tout intervalle de la forme $]2 - h; 2 + h[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 2.

Remarques:
- *Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.*
- *On dit que la suite (u_n) est convergente de limite l ou qu'elle converge vers l.*

1.2 Limite infinie et suite divergente

Définition:
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2$.

Soit $A > 0$ un nombre réel positif, tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0 tel que $n_0 > \sqrt{A}$. En effet :

$$u_n > A \Longleftrightarrow n^2 > A \Longleftrightarrow n > \sqrt{A}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Définition:
Une suite (u_n) est dite divergente si elle n'est pas convergente vers un réel l.

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = -1 \quad ; \quad u_3 = 1 \quad ; \quad \ldots$$

Cette suite est alternée, elle ne converge vers aucun réel mais n'a pas non plus pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

Remarque:
Il y a deux types de suites divergentes :
- *celles qui n'ont aucune limite ;*
- *celles qui ont pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.*

2 Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites dont on connait la limite. La question légitime que l'on peut se poser est :

Les suites (u_n+v_n), $(u_n\times v_n)$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ont-elles une limite et si oui quelle est-elle ?

2.1 Limite d'une somme

Théorème:
Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels.

Si (u_n) a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors (u_n+v_n) a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*FI*

*FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de (u_n+v_n).*

2.2 Limite d'un produit

Théorème:
Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels non-nuls.

Si (u_n) a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n\times v_n)$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

2.3 Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

- $\boxed{\text{le dénominateur a une limite non-nul :}}$

Théorème:
Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels non-nuls..

Si (u_n) a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

- $\boxed{\text{le dénominateur a une limite nul :}}$

Théorème:
Dans le tableau suivant, l est un réel non-nul.

Si (u_n) a pour limite	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	0
et si (v_n) a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

2.4 Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminés :

$$"\infty-\infty" \qquad "0\times\infty" \qquad "\frac{\infty}{\infty}" \qquad "\frac{0}{0}"$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".

3 Limites et comparaison

Théorème:
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait :

$$u_n \leq v_n$$

- *Si* $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *;*
- *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème: (Des gendarmes)
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \qquad , \qquad \lim_{n\to+\infty} w_n = l$$

où l est un réel alors la suite (v_n) est convergente et sa limite est l également.

4 Limite d'une suite géométrique

Théorème:
q désigne un nombre réel.

- *Si* $q > 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- *Si* $-1 < q < 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
- *Si* $q < -1$ *alors* (q^n) *n'a pas de limite.*

5 Convergence des suites monotones

Définition:
Soit (u_n) une suite,

- *s'il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$ pour tout n alors on dit que (u_n) est majorée par M.*
  M est alors un majorant de la suite (u_n) ;
- *s'il existe un réel m tel que $m \leqslant u_n$ pour tout n alors on dit que (u_n) est minorée par m.*
  m est alors un minorant de la suite (u_n) ;
- *si (u_n) est à la fois majorée et minorée, on dit que (u_n) est bornée.*

Théorème: (admis)

- *Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.*
- *Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.*

Remarque:
Cette propriété permet de montrer qu'une suite est convergente mais ne fournit pas sa limite.

Propriété:

- *Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- *Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration:
Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

- *(u_n) est non-majorée donc pour tout réel $A > 0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$;*
- *(u_n) est croissante donc pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > A$.*

Ainsi, quelque soit $A > 0$, il existe n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n_0} > A$ ce qui revient à dire que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

La démonstration du deuxième point est analogue.

Propriété:

- *Si une suite* (u_n) *est croissante et admet pour limite* l *alors pour tout entier naturel* n*,* $u_n \leq l$.
- *Si une suite* (u_n) *est décroissante et admet pour limite* l *alors pour tout entier naturel* n*,* $u_n \geq l$.

Démonstration: (Par l'absurde)
Supposons qu'il existe un terme de la suite noté u_N *tel que* $u_N > l$.
Soit d *la distance non-nul* $d = u_N - l$. *On a donc* $\dfrac{d}{2} < u_N - l$ *soit* $l + \dfrac{d}{2} < u_N$ *donc l'intervalle* $\left]l - \dfrac{d}{2}; l + \dfrac{d}{2}\right[$ *contient au plus tous les termes d'indice inférieur ou égale à* N *puisque* (u_n) *est croissante, c'est à dire un nombre fini de terme.*
Cela contredit le fait que (u_n) *admet pour limite* l. *On en déduit donc que pour tout entier naturel* n*,* $u_n \leq l$.
La démonstration du deuxième point est analogue.