

Restitution Organisée de Connaissance (R.O.C.)

23/05/2013

R.O.C. 1:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration:

- Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n , $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq v_n$;
- Soit $A > 0$ un réel fixé.
La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_1 ;

Si on considère $n_2 = \max(n_0, n_1)$ alors pour tout entier n , $n \geq n_2$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) donc la suite (v_n) a pour limite $+\infty$.

R.O.C. 2:

Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Démonstration:

Soit $q > 1$ alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

Soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété $q^n \geq 1 + na$ pour n entier naturel.

Initialisation : Pour $n = 0$, $q^0 = 1$ et $1 + 0.a = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On fixe n un entier naturel et on suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour cet entier.

Par hypothèse de récurrence : $q^n \geq 1 + na$ donc $q^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$ puisque $(1 + a) = q > 0$

$$q^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$

$$q^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a \text{ puisque } na^2 \geq 0$$

La propriété est alors vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier n : $q^n \geq 1 + na$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$ pour $a > 0$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

R.O.C. 3:

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont deux événements indépendants.

Démonstration:

D'après la formule des probabilités totales, $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$ donc

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Or A et B sont indépendants d'où

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = (1 - P(A)) \times P(B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$$

On en déduit que $\bar{A}$ et B sont deux événements indépendants.₁

R.O.C. 4:

Il existe une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(E) : \begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Démonstration:

L'existence d'une telle fonction est admise, montrons que celle-ci est unique.

- Montrons d'abord que si f vérifie (E) alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0 \text{ car } f' = f.$$

La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = g(0) = f(0)f(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel x_0 vérifiant $f(x_0) = 0$, on aurait alors $g(x_0) = 1 = f(x_0)f(-x_0) = 0$ soit $1 = 0$ ce qui est absurde donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

- Soit f_1 et f_2 deux fonctions vérifiant (E), posons $q = \frac{f_1}{f_2}$.

Par ce qui précède f_2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc q est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions dérivables.

$$\text{De plus, } \left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2} = \frac{f_1f_2 - f_1f_2}{f_2^2} = 0.$$

La fonction q est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $q(x) = q(0) = \frac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$: on a donc montré que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ c'est à dire qu'il existe une unique fonction vérifiant (E).

R.O.C. 5:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Démonstration:

Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, on étudie la fonction $h(x) = e^x - x$.

h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $h'(x) = e^x - 1$.

$x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $h'(0) = 0$ donc $h'(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ soit h est croissante sur $[0; +\infty[$.

Or $h(0) = 1$ donc $h(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ soit $e^x > x$ sur $[0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ on effectue un changement de variable.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty. \text{ Posons } X = -x, \text{ on a alors } e^x = e^{-X} \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

R.O.C. 6:

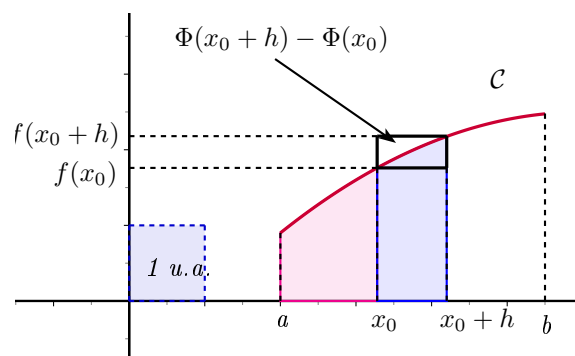
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(x)dx$ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$

Démonstration:

On se place dans le cas où f est croissante sur $[a; b]$. Soit x_0 et h deux nombres tels que $x_0 \in [a; b]$, $x_0 + h \in [a; b]$ et $h \neq 0$.

Si $h > 0$, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$. De plus, $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$ exprime l'aire sous $\mathcal{C}$ sur $[x_0; x_0 + h]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$ d'où :

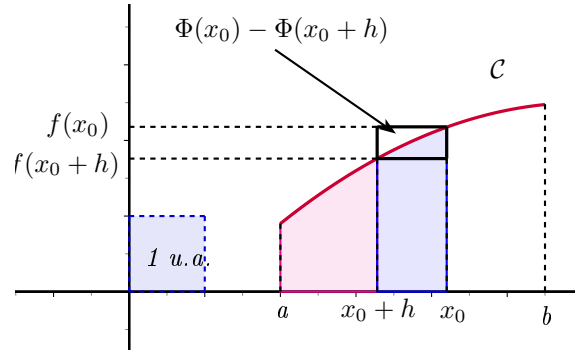
$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$



et comme h est non-nul et positif, on obtient : $f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$

Si $h < 0$, comme f est croissante, $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$. De plus, $\Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h)$ exprime l'aire sous $\mathcal{C}$ sur $[x_0 + h; x_0]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur $-h$ et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$ d'où :

$$-h \times f(x_0 + h) \leq \Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h) \leq -h \times f(x_0)$$



et comme h est non-nul et négatif, on obtient en divisant par $-h$ qui est positif : $f(x_0 + h) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$

Par continuité de f en x_0 , on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Ainsi Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ pour tout réel x_0 de $[a; b]$ donc Φ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$

R.O.C. 7:

Toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet des primitives sur $[a; b]$.

Démonstration:

On admet que toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet un minimum m et un maximum M .

Soit donc f une fonction continue sur $[a; b]$. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ sur $[a; b]$ donc la fonction $h(x) = f(x) - m$ est une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

D'après le théorème précédent, h admet une primitive Φ sur $[a; b]$, avec $\Phi'(x) = h(x)$.

Posons donc $F(x) = \Phi(x) + mx$.

F est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[a; b]$

R.O.C. 8:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

On dit que une loi exponentielle est sans vieillissement ou sans mémoire.

Démonstration:

Soit $t > 0$ fixé et $h > 0$, la probabilité que $X \geq t + h$ sachant que $X \geq h$ est égale à :

$$\begin{aligned} P_{X \geq t}(X \geq t + h) &= \frac{P((X \geq h) \cap (X \geq t + h))}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geq h). \end{aligned}$$

R.O.C. 9:

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . Son espérance mathématique est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Démonstration:

Soit $I(t)$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $I(t) = \int_0^t x \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Posons $u'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ et $v(x) = x$. On a alors $u(x) = -e^{-\lambda x}$ et $v'(x) = 1$. De plus, u et v sont continues, dérivables et de dérivées continues sur $[0; +\infty[$ donc on peut effectuer une intégration par parties et :

$$\begin{aligned} I(t) &= [-xe^{-\lambda x}]_0^t - \int_0^t -e^{-\lambda x} dx \\ &= -te^{-\lambda t} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^t \\ &= -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\lambda t e^{-\lambda t} = 0$ pour $\lambda > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{1}{\lambda}$

R.O.C. 10:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour tout réel $\alpha \in]0; 1[$, il existe un **unique** nombre strictement positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration:

Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Cette fonction fait correspondre à un réel x l'aire sous la courbe de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty; x]$. De plus,

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

Soit $\alpha \in]0; 1[$, on cherche un nombre x strictement positif tel que $P(-x \leq X \leq x) = 1 - \alpha$. On a :

$$P(-x \leq X \leq x) = 2P(X \leq x) - 1 \iff 1 - \alpha = 2\Phi(x) - 1 \iff \Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Démontrer ce théorème revient à montrer que l'équation $\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ admet une unique solution pour $\alpha \in]0; 1[$. Or la fonction Φ a les propriétés ci-dessous :

- Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$

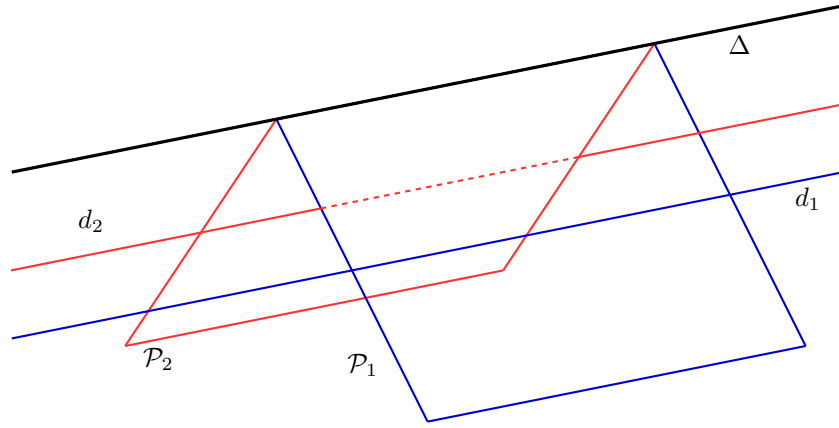
On peut ainsi résumer ces propriétés dans le tableau de variation ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$\Phi(x)$	$\frac{1}{2}$	1

Or pour $\alpha \in]0; 1[$, $1 - \frac{\alpha}{2} \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $u_\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

R.O.C. 11:

Soit d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en une droite Δ alors d_1 et d_2 sont parallèles à Δ .

**Démonstration:**

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d_1 , comme d_1 et d_2 sont parallèles, $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d_2 .

Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ , l'objectif de la démonstration est de montrer que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

On considère donc $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_1$ et $(\vec{u}, \vec{t})$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_2$. Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en Δ , le vecteur $\vec{w}$ peut se décomposer de deux manières différentes :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{t}$$

donc

$$(a - c)\vec{u} = d\vec{t} - b\vec{v}$$

Si $a \neq c$ alors $\vec{u}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires ce qui contredit le fait que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soient sécants d'où $a = c$.

On en déduit donc que $d\vec{t} = b\vec{v}$ soit que $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont colinéaires ce qui contredit là encore fait que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soient sécants d'où $d = b = 0$.

On obtient donc que $\vec{w} = a\vec{u}$ donc d_1 et d_2 sont parallèles à Δ .

R.O.C. 12:

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Soit $\alpha \in]0; 1[$ et u_α le réel tel que $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$$

où

$$I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Démonstration:

Soit $\alpha \in]0; 1[$ et u_α le réel tel que $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. D'après le théorème de Moivre-Laplace, si X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

or

$$-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha \iff -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \iff p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n \in I_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

R.O.C. 13:

Soit F_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe la fréquence du caractère dans cet échantillon. La proportion p inconnue du caractère dans la population est telle que :

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0,95$$

Démonstration:

On sait que (vu en seconde) que $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0,95$. Or :

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \iff -F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq -p \leq -F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \iff F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq p \geq F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

donc

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0,95$$

R.O.C. 14:

Si une droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$ alors elle est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Démonstration:

Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes en A du plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Ces vecteurs sont non-nuls et non-colinéaires donc le plan $\mathcal{P}$ est définie par A , $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Ainsi pour toute droite d du plan $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{v}$, il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$$

Δ est orthogonale à d_1 et d_2 donc son vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ soit $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$ donc

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \cdot \vec{n} = a\vec{u}_1 \cdot \vec{n} + b\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$$

donc Δ est orthogonale à d . (CQFD)

R.O.C. 15:

Dans un repère orthonormé :

- Si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$;
- Si a , b et c sont trois nombres réels non tous nuls alors l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Démonstration:

- Si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ alors $\vec{n}$ est non-nul. Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz + d = 0$$

avec $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Ainsi $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

- Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ avec a , b et c sont trois nombres réels non tous nuls. Supposons $a \neq 0$ alors le point $A\left(\frac{-d}{a}; 0; 0\right) \in \mathcal{E}$ et

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = ax + by + cz + d = 0$$

Ainsi $M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donc $\mathcal{E}$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

R.O.C. 16:

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration:

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

- (u_n) est non-majorée donc pour tout réel $A > 0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$;
- (u_n) est croissante donc pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > A$.

Ainsi, quelque soit $A > 0$, il existe n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n_0} > A$ ce qui revient à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$