Chapitre 3: Fonctions et limites

1 Limite à l'infini

1.1 Limite finie

Dans cette partie, l désigne un nombre réel.

Définition:
On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On dit que $f(x)$ tend vers l et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Remarque:
On définit de la même manière la notion de limite l en $-\infty$ que l'on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

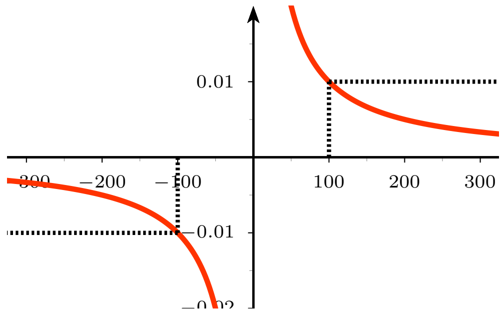
Exemple:
Soit f la fonction inverse définie pour tout réel x non-nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]0; 0,01[$ pour $x > 100$, on dit que f a pour limite 0 en $+\infty$ et on note :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-0,01; 0[$ pour $x < -100$, on dit que f a pour limite 0 en $-\infty$ et on note :*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



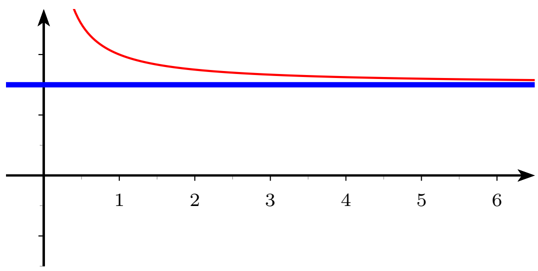
Propriété:
Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$ ont pour limite 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

Propriété:
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan :

- *Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$.*

Exemple:
Pou $x \neq 0$, $\quad \dfrac{3x+1}{x} = 3 + \dfrac{1}{x} \qquad$ *et* $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \dfrac{1}{x} = 3$

donc la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x}$ en $+\infty$



1.2 Limite infinie

Définition:
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Remarque:
On définit de la même manière la notion de limite $-\infty$ en $+\infty$, la notion de limite $+\infty$ en $-\infty$ et la notion de limite $-\infty$ en $-\infty$.

Exemple:
Soit f la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$.

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]1000;+\infty[$ pour $x>100$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note :*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$$

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]1000;+\infty[$ pour $x<-100$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note :*

$$\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$$

Propriété:
La fonction $x\longmapsto x^n$ où $n\in\mathbb{N}^\star$ a pour limite :

- *Si n est pair,* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$.
- *Si n est impair,* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

2 Limite en un réel a

Définition:
On dit que la limite de f en a est l si, $f(x)$ peut-être rendu aussi proche de l que l'on veut, à condition que x soit suffisamment proche de a et on note :

$$\lim_{x\to a} f(x)=l$$

Propriété:

- *Si f admet une limite en a alors elle est unique.*
- *Si f est définie en a et admet une limite en a alors cette limite est égale à $f(a)$.*

Définition:
On dit que la limite de f en a est $+\infty$ si, lorsque x tend vers a, $f(x)$ est aussi grand que l'on veut et on note :

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

Exemple:
Soit f la fonction inverse définie pour tout réel non-nul x par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]100;+\infty[$ pour $0<x<0,01$, on dit que f a pour limite $+\infty$ à droite en 0 et on note :*

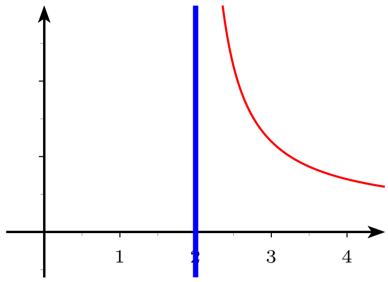
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$$

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\infty;-100[$ pour $-0,01<x<0$, on dit que f a pour limite $-\infty$ à gauche en 0 et on note :*

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$$

Définition:
Soit a un réel et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère. Lorsque la limite (à droite ou à gauche) de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

Exemple:
Pour $x > 2$, $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0^+$ *et* $\lim\limits_{x \to 2^+} x + 3 = 5$ *donc* $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3+x}{x-2} = +\infty$
donc la droite d'équation $x = 2$ *est une asymptote verticale à la courbe* $\mathcal{C}$ *de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{3+x}{x-2}$.



3 Opérations sur les limites

3.1 Limite d'une somme

Théorème:
Dans le tableau suivant, l *et* l' *sont deux réels.* a *est soit un réel soit* $-\infty$ *ou soit* $+\infty$.

Si la limite de f *en* a *est*	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et la limite de g *en* a *est*	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors la limite de $(f+g)$ *en* a *est*	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*FI*

FI signifie ***forme indéterminée****, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de* $(f+g)$.

Exemple:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad donc \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} -3x + 2 = -\infty \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty \quad donc \quad \lim_{x \to +\infty} -3x + 2 - \sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad et \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad donc \quad \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = +\infty$$

3.2 Limite d'un produit

Théorème:
Dans le tableau suivant, l *et* l' *sont deux réels.* a *est soit un réel soit* $-\infty$ *ou soit* $+\infty$.

Si la limite de f *en* a *est*	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et la limite de g *en* a *est*	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors la limite de $(f \times g)$ *en* a *est*	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

Exemple:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty \quad donc \quad \lim_{x \to +\infty} -x^2\sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \quad et \quad \lim_{x \to -\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3 \quad donc \quad \lim_{x \to -\infty} (2 + \frac{1}{x})(3 + \frac{1}{x}) = 6$$

3.3 Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

$\boxed{\text{le dénominateur a une limite non-nul :}}$

Théorème:
Dans le tableau suivant, l *et* l' *sont deux réels.* a *est soit un réel soit* $-\infty$ *ou soit* $+\infty$.

Si la limite de f *en* a *est*	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et la limite de g *en* a *est*	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
alors la limite de $\dfrac{f}{g}$ *en* a *est*	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

Exemple:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} -2+\frac{1}{x} = -2 \quad donc \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{-2+\frac{1}{x}} = -\infty$$

$\boxed{\text{le dénominateur a une limite nul :}}$

Théorème:
Dans le tableau suivant, l est un réel non-nul. a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	0
et la limite de g en a est	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

Exemple:

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0^+ \quad et \quad \lim_{x\to0^+} 2x+7 = 7 \quad donc \quad \lim_{x\to0^+} \frac{2x+7}{\sqrt{x}} = +\infty$$

3.4 Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminés :

$$"\infty-\infty" \qquad "0\times\infty" \qquad "\frac{\infty}{\infty}" \qquad "\frac{0}{0}"$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".

4 Théorèmes de comparaison

Théorème: (Théorème des gendarmes)
Soit f, u et v trois fonctions définies sur $]A\,;+\infty[$.Si :

$$u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$$

et si

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = l$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

Démonstartion:
Soit I un intervalle ouvert contenant l.
$\lim_{x\to+\infty} u(x) = l$ *donc il existe un réel M tel que pour tout $x > M$; $u(x) \in I$.*
$\lim_{x\to+\infty} v(x) = l$ *donc il existe un réel M tel que pour tout $x > M$; $v(x) \in I$.*
Si on note M'' le plus grand de A, M et M' alors pour tout $x > M''$; $f(x) \in I$.
On en déduit donc que f tend vers l en $+\infty$.

Théorème: (Théorème de comparaison)
Soit f et g deux fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$.

- *Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;*
- *Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;*

Remarque:
On a des propriétés similaires dans le cas de limite en $-\infty$ et en un réel a.

5 Limite d'une fonction composée

Définition:
La fonction f est appelée la composée de la fonction u suivie de la fonction v, si on a :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & u(x) \arrow[r, "v"] & f(x) = v[u(x)] \end{tikzcd}$$

On note $f = v \circ u$

Théorème:
a, b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. u, v et f désignent des fonctions telles que $f = v \circ u$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \to b} v(X) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = c$$

Exemple:
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2 + \dfrac{1}{x}}$.
Posons $X = 2 + \frac{1}{x}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$ *et* $\lim\limits_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$, *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{2}$