Théorèmes de comparaisons

Exercice 1:

Démontrer le théorème ci-dessous :
Soit f, u et v trois fonctions définies sur $[M\,;+\infty[$.
Si $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{x + 4cos(x)}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$,
$$1 - \frac{4}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{4}{x}$$
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice 3:

Démontrer le théorème ci-dessous :
Soit f et g deux fonctions définies sur $I = [M\,;+\infty[$.
Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Exercice 4:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 3sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) \geq x - 3$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice 5:

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout réel x,
$$\frac{4x^2}{1+x^2} \leq f(x) \leq 4 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$