Chapitre 4: Nombres complexes

1 Notion de nombre complexe

Théorème:
*Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés **nombres complexes**, tel que :*

- *$\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;*
- *$\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;*
- *$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les règles de calcul analogue à celle de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$;*
- *tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels. Cette écriture s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z.*

Vocabulaire:

- *a s'appelle la partie réelle du complexe. Si $z = a + ib$, alors on note $Re(z)$ la partie réelle de z et $Re(z) = a$.*
- *b s'appelle la partie imaginaire du complexe. Si $z = a + ib$, alors on note $Im(z)$ la partie réelle de z et $Im(z) = b$.*
- *tout nombre complexe de la forme $z = ib$ est appelé imaginaire pur.*

Propriété:

- *z est réel si et seulement si $Im(z) = 0$.*
- *z est un imaginaire pur si et seulement si $Re(z) = 0$.*

Théorème:
Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + ib = a' + ib' \Longleftrightarrow a = a' \texttt{ et } b = b'$$

2 Conjugué

2.1 Définition

Définition:
Soi $z = a + ib$ avec a et b réels. Le nombre complexe conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe $a - ib$.

Exemple:
Si $z = 5 - 7i$ alors $\overline{z} = 5 + 7i$, si $z = 2$ alors $\overline{z} = 2$ et si $z = 2i$ alors $\overline{z} = -2i$.

Propriété:
Soit $z \in \mathbb{C}$ alors :

- $z + \overline{z} = 2Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2Im(z)$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété:

- *Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.*
- *Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z + \overline{z} = 0$.*

Théorème:
Soit $z \in \mathbb{C}$. Le produit $z\overline{z}$ est un nombre réel positif et si $z = a + ib$ alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

2.2 Opérations sur les nombres conjugués

Propriété:
Pour tous complexes z et z' :
$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ $\quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ *si* $z' \neq 0$

Théorème:
Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout entier n non-nul, $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

3 Résolution des équations du second degré

Propriété:
Pour tous nombres complexes z et z' :

$$zz' = 0 \text{ si et seulement si } z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

Propriété:
Soient a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$, de discriminant Δ, admet :

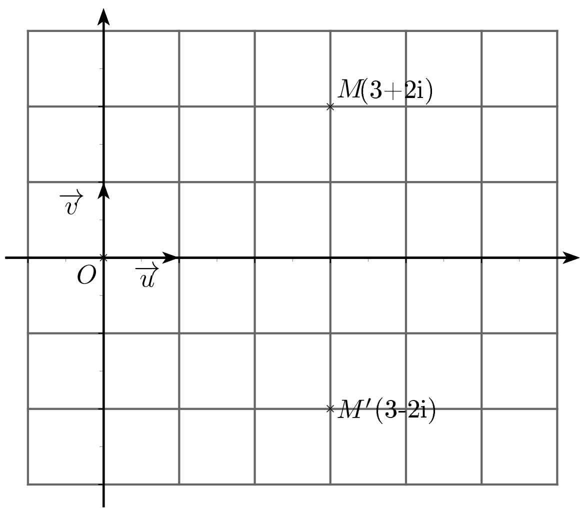
- *deux solutions réelles* $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *si* $\Delta > 0$.
- *une solution réelle double* $-\dfrac{b}{2a}$ *si* $\Delta = 0$.
- *deux solutions complexes* $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et* $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *si* $\Delta < 0$.

4 Représentation d'un nombre complexe par un point du plan

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et est appelé plan complexe.

4.1 Affixe d'un point

Définition:
- *Á tout nombre complexe $a+ib$, où a et b sont réels, on associe le point $M(a;b)$ appelé point image de $z = a+ib$.*
- *Réciproquement, à tout point $M(a;b)$ on associe le nombre complexe $a+ib$ appelé affixe de M. On note alors $M(a+ib)$.*



Propriété:
- *M d'affixe z appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $Im(z) = 0$;*
- *M d'affixe z appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si $Re(z) = 0$;*
- *M d'affixe z et M' d'affixe $\overline{z}$ sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses.*

4.2 Affixe d'un vecteur

Définition:
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$ *de coordonnées* $(a;b)$ *est le complexe* $z = a + ib$.

Propriété:
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *est* $z_B - z_A$ *où* z_A *et* z_B *sont les affixes de* A *et* B.

Théorème:
Le milieu I *du segment* $[AB]$ *où* $A(z_A)$ *et* $B(z_B)$ *a pour affixe :* $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$