

Lien entre dérivabilité et continuité

1 Retour en première

Définition:

f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Ainsi, dire que f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ signifie que la courbe de la fonction f admet en $A(a; f(a))$ une tangente non-verticale d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$
 - a. Montrer que f est dérivable en 4 à l'aide de la définition ci-dessous.
 - b. Déterminer d'une autre façon $f'(4)$.
 - c. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 4.
 - d. Déterminer l'équation de la tangente T' à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 6.
 - e. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de T et de T' .
2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = |x|$
 - a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
 - b. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
 - c. Conclure.

2 De la dérivabilité à la continuité

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur I et $a \in I$
 - a. Déterminer le domaine de définition de la fonction T définie par $T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
 - b. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} T(h)$
 - c. Montrer que pour tout h non-nul, $f(a+h) = f(a) + hT(h)$.
 - d. On pose $x = a + h$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
 - e. Conclure
2. Donner des exemples de fonctions continues sur \mathbb{R} mais qui ne sont pas dérivable sur \mathbb{R} .
3. Étudier la continuité des fonctions polynômes et rationnelles sur le domaine de définition.