

# Dérivées et fonctions composées

**Exercice 1:**

Compléter le tableau ci-dessous :

f	f dérivable sur	f'
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$ avec $k$ réel		
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$		
$f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$		
$f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$		
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$		
$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$		
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $n \in \mathbb{N}^*$		
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$		
$f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$		
$f(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$		

**Exercice 2:**

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et  $n$  un entier naturel :

- Démontrer que pour  $n \geq 2$ , la fonction  $u^n$  est dérivable sur  $I$  et

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

- Démontrer que pour  $n \geq 1$ , la fonction  $\frac{1}{u^n}$  est dérivable pour tout réel  $x \in I$  tel que  $u(x) \neq 0$  et

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$$

**Théorème:**

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  tel que pour tout réel  $x \in I$  tel que  $u(x) > 0$ .

La fonction  $\sqrt{u}$  est dérivable sur  $I$  et  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

**Exercice 3:**

Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$

2.  $g(x) = (3x^2 - 2x + 6)^4$

3.  $h(x) = \sqrt{1 + x^2}$

**Exercice 4:**

Dans chaque cas déterminer la fonction  $f = u \circ v$ , préciser son domaine de définition et étudier sa dérivabilité.

1.  $u(x) = x^2$  et  $v(x) = 3x - 4$

3.  $u(x) = \frac{1}{x^2}$  et  $v(x) = 3x + 2$

2.  $u(x) = x^3$  et  $v(x) = 2x^2 + 6x + 1$

4.  $u(x) = \sqrt{x}$  et  $v(x) = x^2 + x + 1$

**Exercice 5:**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur respectivement  $D_f$  et  $D_g$ . On considère la fonction composée  $u = f \circ g$  définie sur  $D_g$  ( c'est à dire que pour tout réel  $x \in D_g$ ,  $g(x) \in D_f$ ). L'objectif de la suite est de répondre aux questions suivantes :

$u$  est-elle dérivable sur  $D_g$ ? Si oui, quelle est l'expression de  $u'(x)$ ?

1. Soit  $a \in D_g$ . Rappeler la définition de la dérivabilité  $a$  pour la fonction  $u$ .
2. On étudie à présent la fonction  $t$  définie au voisinage de  $a$  par :

$$t(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}$$

- a. Compléter l'égalité ci-dessous :

$$t(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{\dots\dots\dots} \times \frac{g(x) - g(a)}{\dots\dots\dots}$$

- b. Déterminer la limite de chacun des termes qui compose  $t$  en  $a$ .
  - c. Conclure.
3. Répondre à la question initiale.