

## Propriétés

### 1 Un théorème fondamental

**Théorème :** Pour tout réel  $x$ ,  $\exp(x) > 0$

**Démonstration :**

1. Étudier la continuité de  $x \mapsto \exp(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer par l'absurde que pour tout réel  $x$ ,  $\exp(x) > 0$ .

*On pourra supposer qu'il existe  $x_0$  tel que  $f(x_0) < 0$*

### 2 Exponentielle d'une somme et conséquences

**Théorème :** Pour tout réel  $a$  et tout réel  $b$ ,  $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

**I. Démonstration :**

- a. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Étudier la fonction dérivée de  $g : x \mapsto \frac{\exp(a + x)}{\exp(x)}$ .
- b. Conclure.

**II. Conséquences :**

- a. Montrer que pour tout réel  $a$ ,  $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
- b. Montrer que pour tout réel  $a$  et tout réel  $b$ ,  $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- c. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$
- d. En déduire que pour tout entier relatif  $n$ ,  $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

**III. Exercices :**

- a. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \exp(3) \exp(2) & \exp(-3x) \exp(x) & \frac{[\exp(2x + 1)]^3 \exp(-6x + 1)}{\exp(4)} \\ \exp(-4) \exp(5) & \frac{[\exp(3)]^2}{[\exp(2)]^3} & \end{array}$$

- b. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\left[ \exp\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 = \exp(x)$