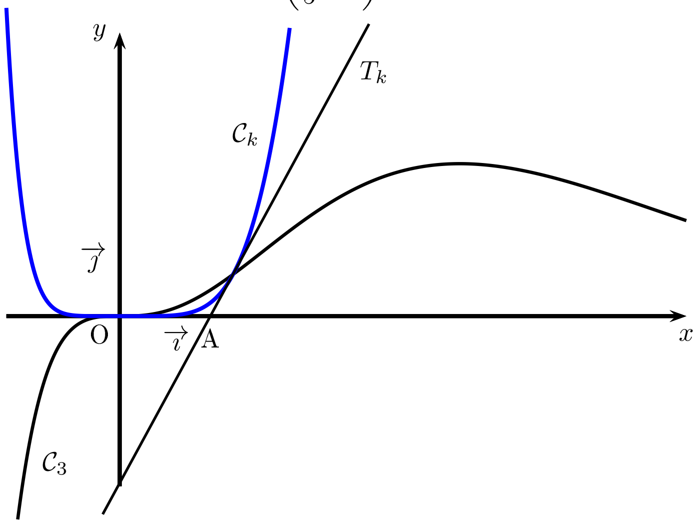
Exercices type bac 2011...suite

Métropole Juin 2011 (5 points)

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathcal{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_3$. La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}\ ;\ 0\right)$.



1. a. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
   c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
2. a. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
   b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
4. a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\ ;\ 0\right)$.
   b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

Antilles Juin 2011 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x - 1$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ et en en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Nouvelle Calédonie Mars 2012 (3 points)

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right) + \mathrm{e} - 2.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$. Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$.
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$.