Introduction

1 Définition

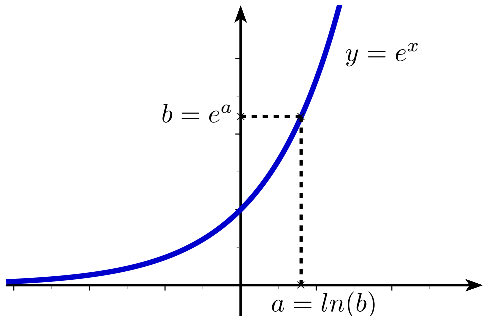
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \quad \texttt{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $b \in]0; +\infty[$, il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$e^a = b$$

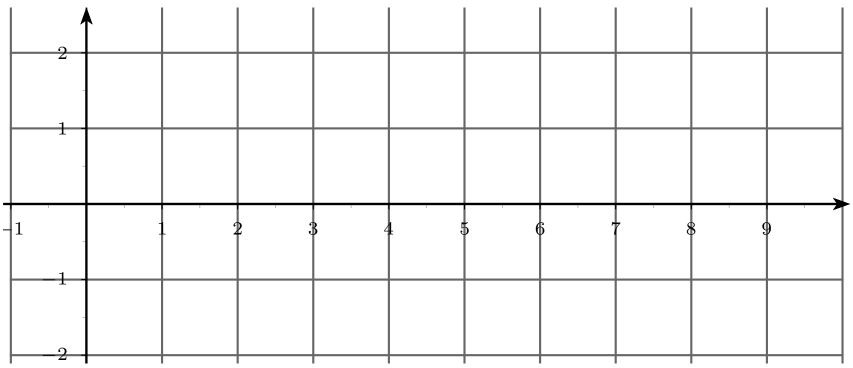
Ce nombre a est noté $\ln(b)$ ou $\ln b$ ce qui se dit « logarithme népérien[1] de b ».



Cela permet de définir la fonction ln sur $]0; +\infty[$ et on obtient l'équivalence suivante :

$$e^a = b \Longleftrightarrow a = lnb$$

1. Pourquoi ne peut-on pas la définir sur $]-\infty; 0[$?
2. Simplifier $e^{\ln(x)}$ pour $x > 0$.
3. Déterminer les réels $\ln(1)$, $\ln(e)$, $\ln\left(e^2\right)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$?
4. Soit x un nombre réel. Simplifier $e^{\ln(e^x)}$. Que peut-on en déduire pour $\ln\left(e^x\right)$?
5. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\ln(3)$.
6. À l'aide de la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction logarithme dans le repère ci-dessous :



7. Conjecturer :
   a. le sens de variation de la fonction ln ;
   b. les limites de la fonction ln en 0 et en $+\infty$.

1. John Napier (1550-1617), en France Neper, est un mathématicien écossais.

Exercice 1:

Pour quelles valeurs de x, les expressions suivantes ont-elles un sens :

1. $\ln(1-x^2)$
2. $\ln(2+3x) - ln(-x+1)$
3. $\ln\left(\dfrac{x^2-4x+3}{e^{2x+1}}\right)$

Exercice 2:

En utilisant le fait que les fonctions exp et ln sont réciproques, résoudre les équations suivantes :

1. $e^x = 1$
2. $e^x = 4$
3. $e^{2x} = 2$
4. $4e^{-x} - 3 = 12$
5. $e^{2x-1} = 2$
6. $e^{-x} = -5$
7. $\ln(x) = 3$
8. $\ln(2x) = 0$
9. $2\ln(x) - 1 = 6$
10. $\ln(2x-1) = 3$
11. $\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 1$
12. $\ln(x^2) = 4$

Exercice 3:

En utilisant le fait que la fonction ln est strictement croissante, résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(x) < 2$
2. $\ln(x) = -10$
3. $\ln(3x-1) > -1$
4. $\ln(3x+1) = \ln(5x-2)$
5. $\ln(x^2+x-2) \leq \ln(x+3)$
6. $\ln(x^2-8) > 0$
7. $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$
8. $\ln(x-2) \geq \ln(2x-1)$

2 Dérivée, variations et signe

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \exp[\ln(x)]$.

1. a. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, exprimer $f'(x)$ en fonction de $\ln'(x)$

   On admettra que ln *est dérivable sur* $]0;+\infty[$.

   b. Simplifier $f(x)$ et utiliser cette simplification pour calculer facilement $f'(x)$.

   c. En déduire $f'(x)$.
2. Valider la conjecture sur les variations de ln.
3. En déduire le signe de la fonction ln sur $]0;+\infty[$.

Exercice 4:

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants en précisant au préalable le domaine de dérivabilité de la fonction f :

1. $f(x) = 4\ln(x) + 3x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x+1}$
3. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$

Exercice 5:

Étudier les variations des fonctions f suivantes en précisant au préalable leur domaine de définition :

1. $f(x) = \ln(x) - x + 6$
2. $f(x) = x\ln(x)$
3. $f(x) = [\ln(x)]^2$