Chapitre 8: Fonction logarithme

1 Définition

Définition:
La fonction logarithme népérien notée ln *est la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *qui, à tout réel* x *strictement positif, associe le réel* y *noté* lnx *dont l'exponentielle est* x.

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

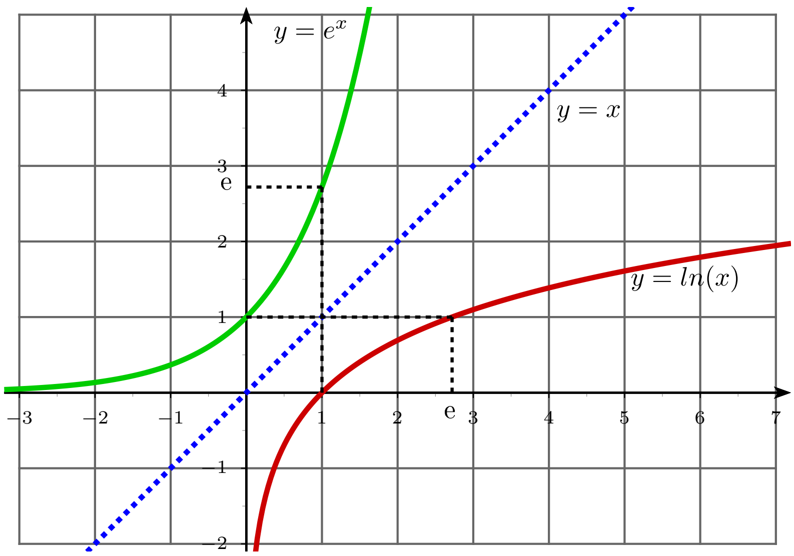
Propriété:
- *Pour tout réel* $x > 0$, $e^{\ln x} = x$
- *Pour tout réel* x, $\ln e^x = x$
- $\ln 1 = 0$ *et* $\ln e = 1$

2 Étude de la fonction logarithme

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$e^{\ln x} = \ln e^x = x$$

On dit que les fonctions logarithme et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre. Graphiquement, si on se place dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions logarithme et exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriété:
La fonction ln est dérivable (donc également continue) sur $]0;+\infty[$ *et* $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On en déduit que la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc pour a et $b > 0$:
- $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$;
- $a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$.

De plus, comme $\ln 1 = 0$, on obtient le signe de la fonction logarithme :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

3 Propriétés algébriques

Propriété:
Soit a et b deux réels strictement positifs et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln(a \times b) = ln(a) + \ln(b)$;
- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $\ln\left(a^n\right) = n\ \ln(a)$;
- $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

4 Limites

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
On obtient le tableau de variations complet de la fonction logarithme :

x	0		1		$+\infty$
$(\ln x)'$	$\|$	$+$	1	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$
Corollaire : Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$.
Propriété : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

5 Dérivation

Propriété:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I alors $f = \ln(u)$ est définie et dérivable sur I et

$$f' = \frac{u'}{u}.$$

Exemple:
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(2x^2+1)$.
$f = \ln(u)$ avec $u(x) = 2x^2+1$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $2x^2+1 > 0$ donc $f = \ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{4x}{2x^2+1}$$