Exercices type bac 2012

Exercice 1:

Partie 1 : Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie 2 : Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour tout x de $[1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

   b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   c. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

   d. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \frac{\ln(k)}{k}$.

   b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

Exercice 2:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

   b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.
   On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel $n,\ \alpha_n + \ln\alpha_n = n$.

   b. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   Placer les nombres $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

   c. Préciser la valeur de α_1.

   d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
3. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

   b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

   $$h(x) = \ln x - x + 1.$$

   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

   c. Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.
4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

Annexe