Relation de Chasles et valeur moyenne

Exercice 1:

Démontrer le théorème suivant : Soit f une fonction continue sur I et a, b, c trois réels de I alors

$$\int_a^b f(x)\mathtt{d}x + \int_b^c f(x)\mathtt{d}x = \int_a^c f(x)\mathtt{d}x$$

Exercice 2:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} -x-1 & si \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} & si \quad -1 \leq x \end{cases}$

1. Tracer dans un repère ci-dessous la courbe de la fonction f sur $[-4; 5]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\mathtt{d}x$ puis $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\mathtt{d}x$. En déduire $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\mathtt{d}x$.

Exercice 3:

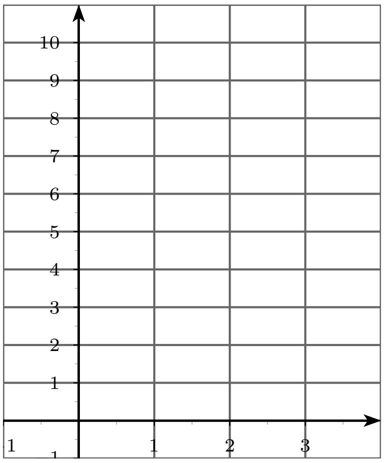
Sachant que $\displaystyle\int_0^1 e^x\mathtt{d}x = e - 1$ et $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathtt{d}x = \frac{1}{3}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 5e^x - 3x^2\mathtt{d}x$ puis $\displaystyle\int_0^1 e^x + 5x^2\mathtt{d}x$.

Exercice 4:

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$$

1. Déterminer la valeur moyenne de $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x$ sur $[1; 3]$.
2. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction f sur $[1; 3]$.



3. Interpréter graphiquement μ.

Exercice 5:

Démontrer le théorème suivant :
Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et soit m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour $x \in [a; b]$. On a alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathtt{d}x \leq M(b-a)$$

Exercice 6:

En utilisant l'inégalité de la moyenne, donner un encadrement de $\displaystyle\int_2^3 \ln(x)\mathtt{d}x$ et de $\displaystyle\int_1^3 e^{x^2}\mathtt{d}x$.