Chapitre 9: Intégration

1 Primitive

1.1 Définition

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x de I,

$$F'(x) = f(x)$$

Si elle existe, on note usuellement F la primitive d'une fonction f.

Exemple:
$\left(2x^2\right)' = 4x$ *donc la fonction* $F : x \mapsto 2x^2$ *est une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $f : x \mapsto 4x$

Théorème:
f est une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.
- *La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$, où c est un réel est aussi une primitive de f sur I.*
- *Toute primitive de f sur I est de la forme $F + c$.*
- *$x_0 \in I$ et c un nombre réel. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = c$.*

1.2 Primitives de fonctions usuelles

Propriété:
Dans le tableau ci-dessous figure la primitive la plus usuelle c'est à dire sans constante.

Fonction définie par $f(x) = \dots$	*Une primitive de f est définie par* $F(x) = \dots$	*sur* $I = \dots$
x^n *où* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \textit{pour} \quad n \geq 0 \\ ]-\infty; 0[\ \textit{ou}\ ]0; +\infty[& \textit{pour} \quad n \leq -2 \end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

1.3 Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété:
- *F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.*
- *F est une primitive de la fonction f sur I et k est un nombre réel alors $k \cdot F$ est une primitive de $k \cdot f$ sur I.*

Propriété:
Dans le tableau ci-dessous u désigne une fonction dérivable sur I.

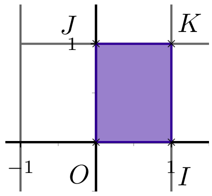
Fonction définie par $f(x) = \dots$	*Une primitive de f est définie par* $F(x) = \dots$	*Conditions*
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ *pour tout x de I*
$u' \cdot u^n$ *où* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	*pour* $n \leq -2$, $u(x) \neq 0$ *pour tout x de I*
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ *pour tout x de I*
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$ *pour tout x de I*
$u'e^u$	e^u	*aucune*

2 Intégration

2.1 Notion d'intégrale

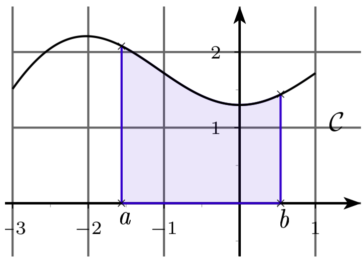
Dans un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, l'unité d'aire (U.A) est l'aire du rectangle $OIKJ$.
Dans la suite :

- toutes les courbes sont représentées dans un repère orthogonal ;
- toutes les aires sont données dans l'unité d'aire associée au repère.



Définition:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ est l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.



$\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathtt{d}x$ ».

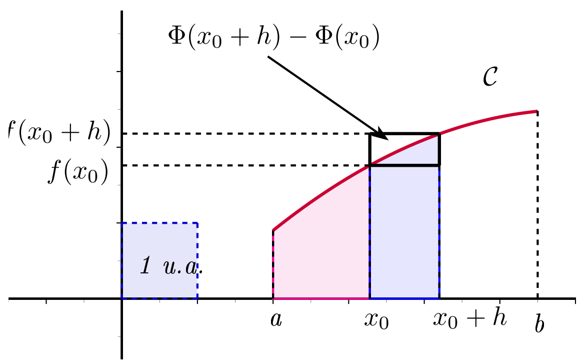
Remarque:
La variable x n'a pas d'importance, on a $\int_a^b f(x)\mathtt{d}x = \int_a^b f(t)\mathtt{d}t = \int_a^b f(q)\mathtt{d}q$.

Propriété:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\mathtt{d}x \geqslant 0$.

2.2 Intégrale d'une fonction continue et conséquences

Théorème:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction $\Phi : x \longmapsto \int_a^x f(x)\mathtt{d}x$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$

Démonstration: (R.O.C.)
On se place dans le cas où f est croissante sur $[a;b]$. Soit x_0 et h deux nombres tels que $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + h \in [a;b]$ et $h \neq 0$.



- *Si $h > 0$, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0+h)$. De plus, $\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)$ exprime l'aire sous $\mathcal{C}$ sur $[x_0;x_0+h]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ d'où :*

$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0+h)$$

  et comme h est non-nul et positif, on obtient : $f(x_0) \leq \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$

- *Si $h < 0$, on démontre de la même manière que : $f(x_0+h) \leq \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$*

Par continuité de f en x_0, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Ainsi Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ pour tout réel x_0 de $[a;b]$ donc Φ est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$

Corollaire:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction f admet une primitive Φ sur $[a;b]$ définie par $\Phi : x \longmapsto \int_a^x f(x)\mathtt{d}x$.

Théorème:
Toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ *admet des primitives sur* $[a;b]$.

Démonstration: (R.O.C.)
On admet que toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ *admet un minimum* m *et un maximum* M.
Soit donc f *une fonction continue sur* $[a;b]$. *Il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) \geq m$ *sur* $[a;b]$ *donc la fonction* $h(x) = f(x) - m$ *est une fonction continue et positive sur* $[a;b]$.
D'après le théorème précédent, h *admet une primitive* Φ *sur* $[a;b]$, *avec* $\Phi'(x) = h(x)$.
Posons donc $F(x) = \Phi(x) + mx$.
F *est dérivable sur* $[a;b]$ *et* $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$ *donc* F *est une primitive de* f *sur* $[a;b]$

Remarque:
On admettra que ce résultat peut s'étend pour un intervalle quelconque I.

Théorème: (fondamental)
Soit f *une fonction continue et positive sur un intervalle* $[a;b]$ *alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

où F *est une primitive quelconque de* f.

Démonstration:
f *une fonction continue et positive sur un intervalle* $[a;b]$ *donc* $x \longmapsto \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ *est aussi une primitive de* f *sur* $[a;b]$ *donc il existe* $k \in \mathbb{R}$ *tel que* $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x + k$ *sur* $[a;b]$. *De plus* $F(a) = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x + k = k$ *donc* $k = F(a)$ *donc* $F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + F(a)$ *soit* $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

2.3 Extension de la notion d'intégrale

On a défini l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et on démontré que si F est une primitive de f sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. On admet dans la suite du chapitre que cette formule s'étend au cas d'une fonction continue de signe quelconque sur $[a;b]$ et on pose la définition suivante :

Définition:
f *est une fonction continue sur un intervalle* I, F *est une primitive de* f *sur* I, a *et* b *sont deux nombres quelconques de* I.
L'intégrale de la fonction f *entre* a *et* b *est le nombre* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Remarque:
On note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Exemple:
$x \longmapsto 6x^2$ *est une fonction continue sur* $[-3;4]$ *donc* $\int_{-3}^4 6x^2\mathrm{d}x = [2x^3]_{-3}^4 = 128 - (-54) = 182$

Propriété:
Soit f *une fonction continue sur* $[a;b]$ *alors* $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$ *et* $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2.4 Linéarité de l'intégration

Théorème:
Soit f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a;b]$ *et* λ *un nombre réel :*

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

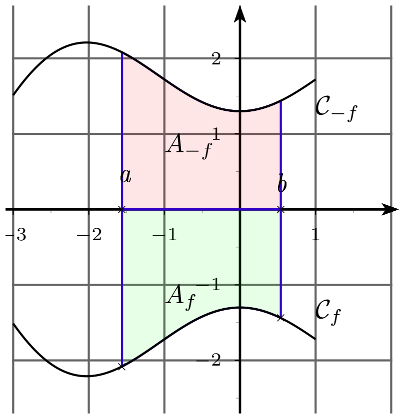
Démonstration:
En exercice...

Corollaire:
Pour $a < b$, si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathtt{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathtt{d}x$

Démonstration:
Considérons $f - g \geq 0$ par hypothèse donc $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\mathtt{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathtt{d}x - \int_a^b g(x)\mathtt{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathtt{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathtt{d}x$

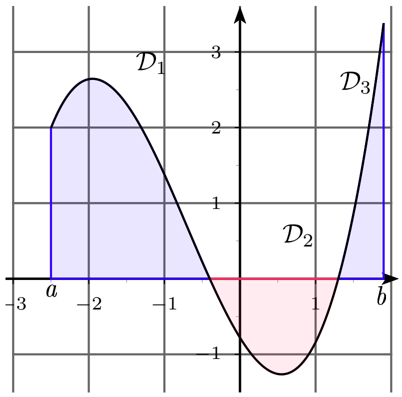
Remarque:
Attention, la réciproque est fausse.

Propriété:
Soit f une fonction continue et négative sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ *est l'opposé de l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.*



En effet, $-f$ est positive donc $\displaystyle\int_a^b -f(x)\mathtt{d}x = A_{-f} = A_f$ *et* $\displaystyle\int_a^b -f(x)\mathtt{d}x = -\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ *donc* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathtt{d}x = -A_f$

Propriété:
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ (de signe quelconque) et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ *est la somme des aires « algébriques »des domaines entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.*



Par exemple, sur la figure ci-dessus :

$$\int_a^b f(x)\mathtt{d}x = \mathcal{A}_{\mathcal{D}_1} - \mathcal{A}_{\mathcal{D}_2} + \mathcal{A}_{\mathcal{D}_3}$$

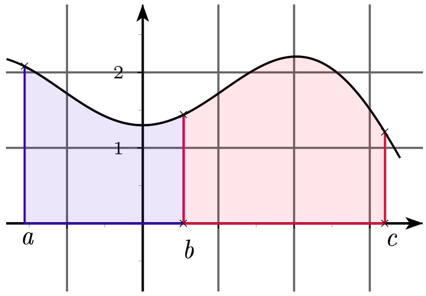
Propriété:
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ tel que $g(x) \leq f(x)$ sur $[a;b]$ alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[a;b]$ est définie par $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathtt{d}x$.

2.5 Relation de Chasles

Propriété: (Relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur I et a, b, c trois réels de I alors

$$\int_a^b f(x)\mathtt{d}x + \int_b^c f(x)\mathtt{d}x = \int_a^c f(x)\mathtt{d}x$$

Remarque:
Dans le cas où f est positive sur I et $a \leq b \leq c$, cette propriété est illustrée par le graphique ci-dessous :



Cependant la relation de Chasles est vraie quels que soient l'ordre des réels a, b, c et le signe de f.

2.6 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition: (Valeur moyenne)
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$$

Théorème: (Inégalité de la moyenne)
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour $x \in [a;b]$. On a alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathtt{d}x \leq M(b-a)$$

3 Intégration par parties

Propriété:
Soit u et v deux fonctions dérivables telles que u' et v' soit continues sur un intervalle $[a;b]$.
On a $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathtt{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathtt{d}x$.

Exemple:
Calculons $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)\mathtt{d}x$.
Pour cela posons

$$u(x) = ln(x) \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = x^2 \qquad v(x) = \frac{1}{3}x^3.$$

Comme u' et v' sont continues sur $[1;2]$, on peut utiliser la formule d'intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2\ln(x)\mathtt{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3}\mathtt{d}x \\ &= \left[\frac{8}{3}\ln(2) - 0\right] - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right) \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}\end{aligned}$$