

Linéarité de l'intégrale et conséquences

Exercice 1:

Démontrer le théorème suivant : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et λ un nombre réel :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$

Exercice 2:

Démontrer le théorème suivant :

Pour $a < b$, si $f \leq g$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

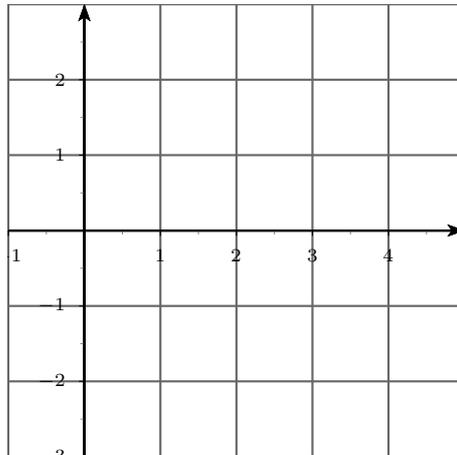
Exercice 3:

Démontrer à l'aide d'un exemple que la réciproque du théorème ci-dessous est fausse.

Exercice 4:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

1. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction f sur $[0; 4]$.



2. Déterminer le signe de f sur $[0; 4]$.
3. Calculer $\int_0^4 f(x) dx$.
4. En déduire l'aire entre la courbe de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.

Exercice 5:

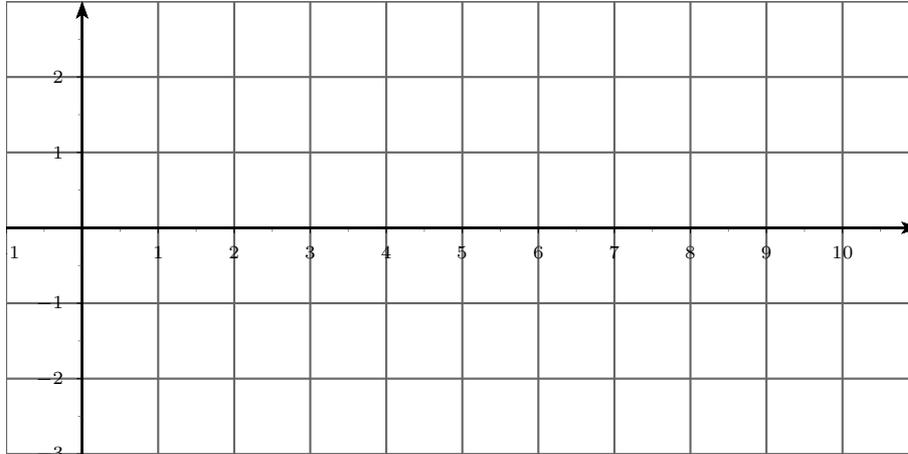
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{1-x}$.

Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 10$.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 4 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

- Démontrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction f sur $[0; 10]$.



- Déterminer le signe de f sur $[0; 10]$.
- Calculer $\int_0^2 f(x)dx$, $\int_2^4 f(x)dx$, $\int_4^7 f(x)dx$, $\int_7^{10} f(x)dx$.
- En déduire l'aire entre la courbe de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 10$.

Exercice 7:

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x - 1)e^x$.

Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 2$.