Primitives

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x de I,

$$F'(x) = f(x)$$

Si elle existe, on note usuellement F la primitive d'une fonction f.

Exercice 1:
Déterminer le domaine de définition puis une primitive des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$ b. $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ c. $h(x) = 6e^x + 6$ d. $m(x) = 7x^2 + \dfrac{7}{x^2}$

Exercice 2:
Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I. Démontrer que :

1. La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$, où c est un réel est aussi une primitive de f sur I.
2. Toute primitive de f sur I est de la forme $F + c$.
3. $x_0 \in I$ et c un nombre réel. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = c$.

Exercice 3:
Compléter le tableau ci-dessous :

Fonction définie par $f(x) = \dots$	Une primitive de f est définie par $F(x) = \dots$	sur $I = \dots$
x^n où $n \in \mathbb{N}$		
$\dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$		
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$		
$\dfrac{1}{x}$		
$\cos x$		
$\sin x$		

Exercice 4:
Compléter le tableau ci-dessous où u désigne une fonction dérivable sur I.

Fonction définie par $f(x) = \dots$	Une primitive de f est définie par $F(x) = \dots$	Conditions
$\dfrac{u'}{u^2}$		
$u' \cdot u^n$ où $n \in \mathbb{N}$		
$\dfrac{u'}{u^n}$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$		
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$		
$\dfrac{u'}{u}$		
$u'e^u$		

Exercice 5:
Déterminer le domaine de définition puis une primitive des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = \dfrac{6x - 3}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$ c. $h(x) = \dfrac{1 + \ln x}{\sqrt{x \ln x}}$ e. $n(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-4}$ g. $p(x) = xe^x + e^x$

b. $g(x) = (1 + e^x)(x + e^x)^3$ d. $m(x) = \dfrac{7 + 14x}{1 + x + x^2}$ f. $o(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)^3} - 2$ h. $q(x) = \dfrac{-4x + 2}{(x-1)^2}$