DEVOIR BILAN 1

Enseignants : LEDAUPHIN S. GREAU D. **Date :** 25/09/2012	**Nom :** **Prénom :** **Classe :**	**Note :**

Exercice 1: 4 points

Déterminer la limite des suites ci-dessous :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général
$$u_n = \frac{2n^2+3}{-n^2+n-4}$$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs tel que pour tout entier n non-nul,
$$v_n \leq \frac{1}{n}$$
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite tel que pour tout entier n,
$$1+n^2 \leq w_n$$

Exercice 2: 8 points

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre entier naturel n : $u_{n+1} = 3 - 0.5u_n$.

1. (a) Calculer les premiers termes de la suite u_1, u_2 et u_3.
   (b) Tracer dans le repère orthonormé joint les droites d'équations $y = x$ et $y = 3 - 0.5x$.
   Placer u_0 sur l'axe des abscisses et construire sur cet axe u_1, u_2 et u_3 (laisser les traits de construction).
   (c) La suite semble-t'elle monotone ? majorée ? minorée ? convergente ?
2. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 2$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique (expliciter la raison et le premier terme).
   (b) En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
   (c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3: 8 points

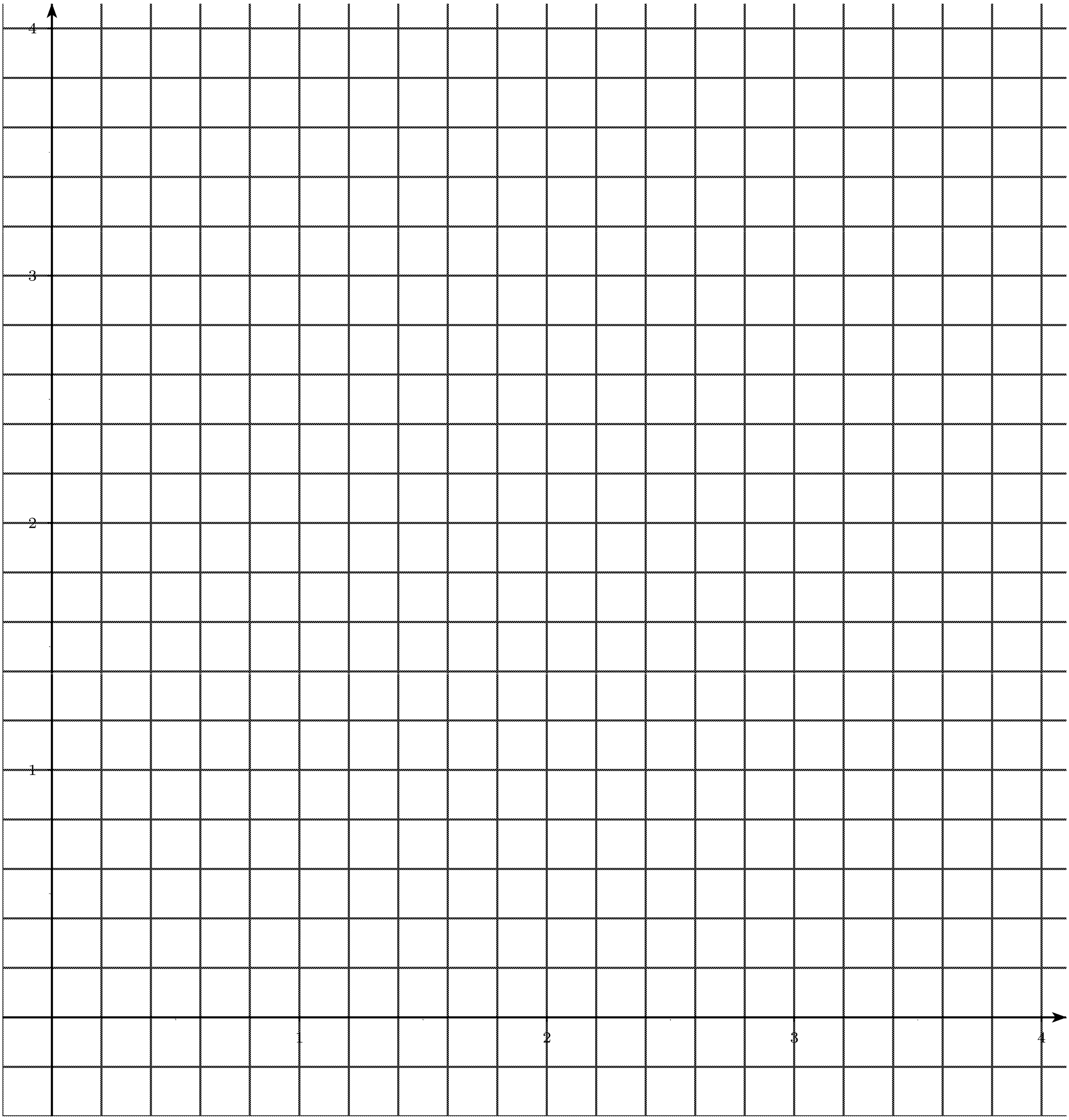
La suite (v_n) est définie par $v_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout nombre entier naturel n : $v_{n+1} = \dfrac{2}{3-v_n}$.

1. (a) Calculer les premiers termes de la suite v_1, v_2 et v_3.
   (b) La suite semble-t'elle monotone ? majorée ? minorée ? convergente ?
2. Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2}{3-x}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
3. Démontrer que pour tout entier n, $1 \leq v_n \leq 2$
4. (a) Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{v_n^2 - 3v_n + 2}{3 - v_n}$
   (b) Étudier le signe de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{x^2-3x+2}{3-x}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
   (c) En déduire que la suite (v_n) est décroissante.
5. Conclure quant à la convergence de la suite (v_n).

ANNEXE

(à rendre avec la copie)

Nom :	**Prénom :**	**Classe :**



Corrigé du devoir bilan 1

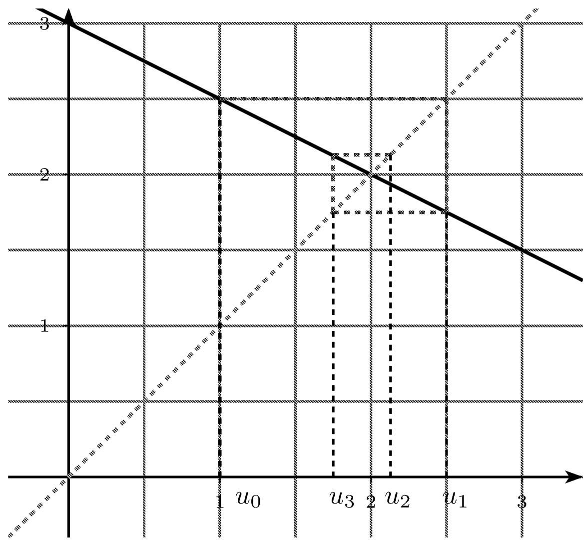
Exercice 4: 4 points

1. Pour tout entier n non-nul,
$$\frac{2n^2+3}{-n^2+n-4} = \frac{2+\dfrac{3}{n^2}}{-1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^2}}$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{3}{n^2} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^2} = -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$
2. Pour tout entier n non-nul,
$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n}$$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+n^2 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

Exercice 5: 8 points

1. (a) $u_1 = 2.5$, $u_2 = 1.75$ et $u_3 = 2.125$.

   (b) Voir ci-dessous :



   (c) La suite semble ni croissante, ni décroissante. Elle semble majorée par 3 et minorée 1. La suite u semble convergente (de limite 2).
2. On définit la suite v par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 2$.

   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$
   $v_{n+1} = (3 - 0.5u_n) - 2$, d'après la définition de u
   $v_{n+1} = 1 - 0.5u_n$ or $u_n = v_n + 2$
   $v_{n+1} = 1 - 0.5(v_n + 2) = -0.5v_n$
   La suite v est donc géométrique de raison (-0.5) et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$

   (b) On en déduit donc $v_n = v_o \times q^n = (-1) \times (-0.5)^n$, puis que $u_n = (-1) \times (-0.5)^n + 2$

   (c) Pour $-1 < q < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0.5)^n = 0$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Exercice 6: 8 points

La suite (v_n) est définie par $v_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout nombre entier naturel n : $v_{n+1} = \dfrac{2}{3-v_n}$.

1. (a) $v_1 = \dfrac{4}{3}$, $v_2 = \dfrac{6}{5}$ et $v_3 = \dfrac{10}{9}$.

   (b) La suite semble décroissante, majorée par $\dfrac{3}{2}$ et minorée par 1.

2. f est une fonction homographique dérivable sur domaine de définition et :

$$f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2}$$

on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;3[$ et sur $]3;+\infty[$.

3. Soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété $1 \leq v_n \leq 2$ pour n entier naturel.
<u>initialisation :</u> Pour $n = 0$, $v_0 = \dfrac{3}{2}$ vérifie $1 \leq v_0 \leq 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
<u>hérédité :</u> On fixe n un entier naturel et on suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour cet entier.
On a : $1 \leq v_n \leq 2$
$f(1) \geq f(v_n) \geq f(2)$ puisque f est croissante sur $[1;2]$
$1 \geq u_{n+1} \geq 2$ puisque $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$
donc $1 \leq u_{n+1} \leq 3$
La propriété est alors vraie au rang $(n+1)$.
<u>Conclusion :</u> d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier n : $1 \leq v_n \leq 2$.

4. (a) Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2}{3-v_n} - v_n \\ &= \frac{2}{3-v_n} - \frac{3v_n - v_n^2}{3-v_n} \\ &= \frac{2 - 3v_n + v_n^2}{3-v_n} \end{aligned}$$

(b) On obtient le résultat à l'aide d'un tableau de signe après avoir montré que $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

(c) Pour tout entier n :
$1 \leq v_n \leq 2$ donc $\dfrac{2-3v_n+v_n^2}{3-v_n} \leq 0$. On en déduit que la suite (v_n) est décroissante.

5. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.