DEVOIR BILAN 2		
Enseignants : LEDAUPHIN S. GREAU D. **Date** : 15/10/2012	**Nom** : **Prénom** : **Classe** :	**Note** : Calculatrice interdite

Exercice 1: 7 points

Partie 1 - Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire

1. Pourquoi a t'on $P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$?
2. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.
3. Si A et B deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0,8$ et $P(A \cap \overline{B}) = 0,2$. Déterminer $P(B)$.

Partie 2 - Jeux successifs

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul, G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » et p_n la probabilité de l'évènement G_n. On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2: 7 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{4}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer que pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.
4. En déduire les variations de la fonction f.
5. Soit C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan :
   (a) Déterminer les équations des tangentes T et T' à la courbe C_f en respectivement -2 et 2.
   (b) Montrer que T et T' s'intersectent en $I(4;0)$.
   (c) T et T' sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 3: 6 points

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \qquad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

   Démontrer que la fonction f admet un minimum.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. (a) Soit n un entier naturel quelconque.
   Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   (b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?
   (c) On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.
   Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

   (b) Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$. | Affecter à d la valeur $0,5d^2$ | Affecter à n la valeur $n + 1$.
Sortie :	Afficher n.

   En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
   Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
   Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

$\boxed{\textbf{CORRIGE}}$