

DEVOIR BILAN 6 (Obligatoire)		
Enseignants : LEDAUPHIN S. GREAU D. Date : 04/02/2013	Nom : Prénom : Classe :	Note :

Exercice 1:

4 points

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n -ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

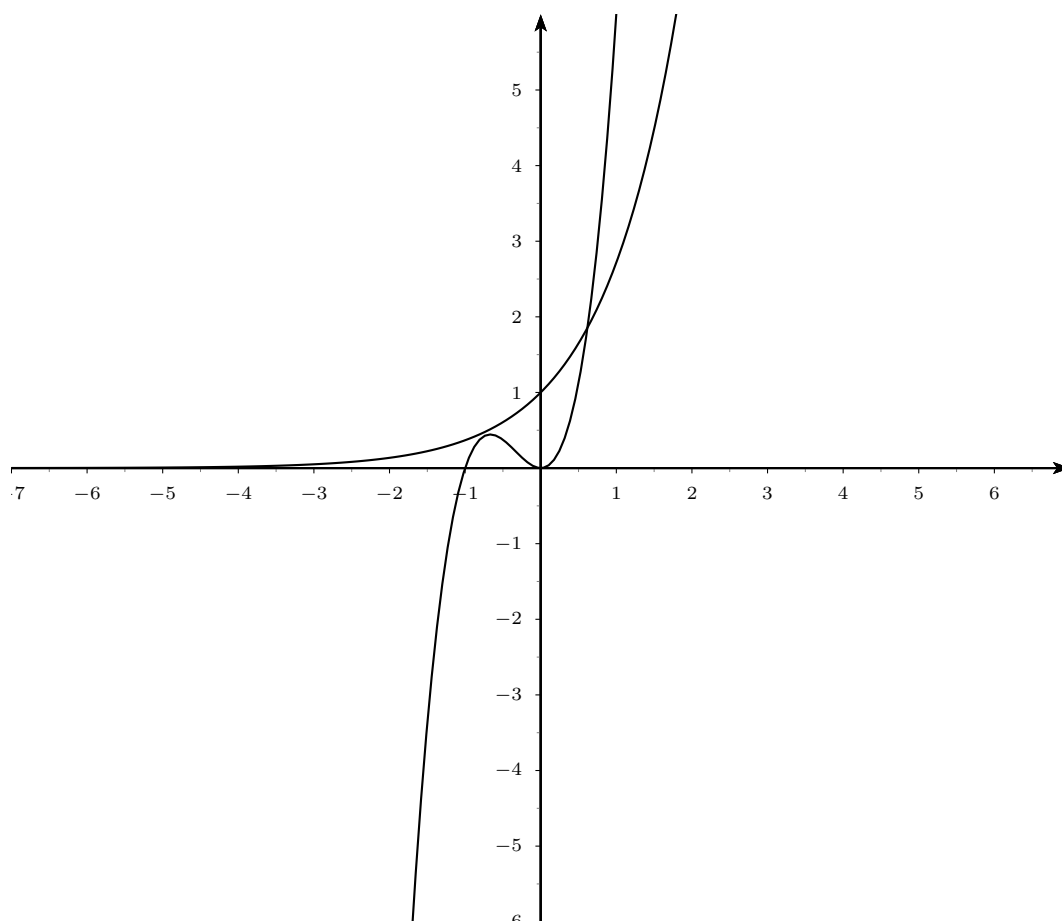
Exercice 2:

6 points

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3(x^2 + x^3)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. a. Étudier selon les valeurs de x , le signe de $x^2 + x^3$.
 b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $] -\infty ; -1]$.
 c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction h , définie pour tout nombre réel de $] -1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur $] -1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $] -1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

- b. Déterminer les variations de la fonction h .
- c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
- d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Exercice 3:

5 points

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathcal{C}$ par

$$P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. a. Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.
b. En déduire les solutions dans $\mathcal{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 1 - i, \quad z_J = i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'axe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Soit D le point d'axe $z_D = -1 + i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.
 - a. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r .
 - b. Soit C l'image du point L par la rotation r . Déterminer l'axe du point C.
5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

Exercice 4:

5 points

Partie A - Étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 4 \ln x$$

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x .

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

Sur le graphique fourni ci-dessous, on a tracé une partie de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= g(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.
2. Au moyen de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite d'équation $y = x$, représenter les termes u_1 , u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

3. Déterminer les variations de la fonction g sur $[0; 1]$.
4. Montrer que pour tout entier n , $u_n \in [0; 1]$.
5. On admet que pour tout entier naturel n , $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.

En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques.

En déduire que 0,838 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

