DEVOIR BILAN 7

Enseignants : GREAU D.	**Nom** :	**Note** :
Date : 16/04/2013	**Prénom** :	

Exercice 1: 8 points

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges. Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile. Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1
On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2
On tire au hasard un cube de l'urne et on regarde si le cube est bleu. On répète alors de façon indépendante 100 fois cette expérience aléatoire et on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où l'on a obtenu un cube bleu.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir 70 fois un cube bleu.
3. Déterminer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Déterminer $P\left(E(X) - \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \sigma(X)\right)$
5. En utilisant la loi normale centrée réduite, déterminer une approximation de $P(56 \leq X \leq 64)$ à 10^{-3} près.

Exercice 2: 4 points

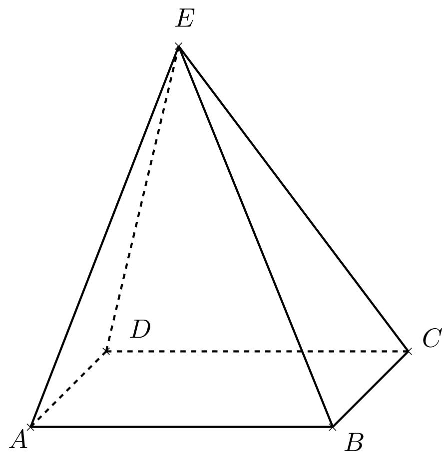
Soit X une variable aléatoire qui suit $\mathcal{N}(0;1)$.

1. Donner l'expression de la fonction de densité de X.
2. Tracer à main levé la courbe de cette densité.
3. Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.
   a. Démontrer que Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x)$.
   c. Démontrer que $P\left(-x \leq X \leq x\right) = 2\Phi(x) - 1$.
4. Démontrer que pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un **unique** nombre strictement positif u_α tel que :
$$P\left(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$
5. Déterminer $u_{0,3}$.

Exercice 3: 5 points

Soit $ABCDE$ une pyramide à base rectangulaire.

1. Placer le point :
   a. I tel que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$;
   b. J tel que $3\overrightarrow{EJ} - \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{0}$;
   c. K milieu du segment $[EB]$;
   d. L milieu du segment $[EC]$.
2. Démontrer que I, J, K et L sont coplanaires.
3. Déterminer puis tracer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).
4. La droite orthogonale au plan (ABC) passant par E coupe le plan $ABCD$ en H. On admet que $EH = 6$, $AB = 3$ et $AD = 5$. Déterminer le volume du solide $ABCDE$.



Exercice 4: 3 points

Un producteur de pamplemousses observe que le diamètre des fruits arrivés à maturité suit une loi normale Y de paramètres $\mu = 12$ cm et $\sigma = 3$ cm. Déterminer la probabilité que le diamètre d'un pamplemousse soit :

1. inférieur à 11 cm ;
2. compris entre 11 cm et 14 cm.
3. supérieur à 14 cm.