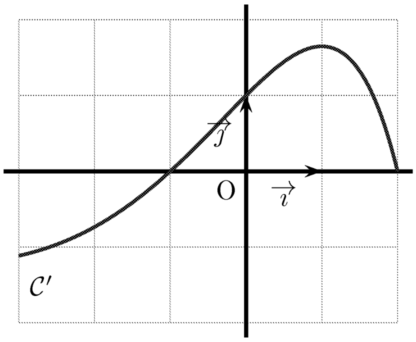
Devoir maison 1

Exercice 1: 6 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$. On dispose de plus des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1 ; 0)$.

Exercice 2: 6 points

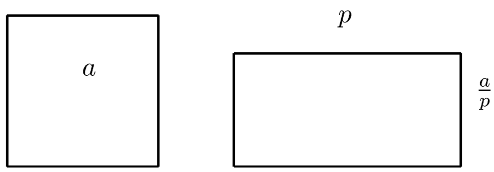
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.
   c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 3: 8 points

Soient a un entier non-nul. L'objectif de cette activité est d'approximer $\sqrt{a}$. On considère un carré d'aire a et un rectangle de même aire et de dimensions p et $\dfrac{a}{p}$ avec p rationnel, non-nul et $p \neq \dfrac{a}{p}$.



1. Qu'implique la condition $p \neq \dfrac{a}{p}$ pour le rectangle ?
2. On se place dans le cas où $\sqrt{a} < p$. Montrer que :
$$\frac{a}{p} < \sqrt{a}$$
3. Soit b la moyenne arithmétique de p et $\dfrac{a}{p}$. Montrer que :
$$\sqrt{a} < b < p$$

Ainsi b est plus proche de $\sqrt{a}$ que p d'où l'idée de réitérer le procédé en remplaçant p par $\dfrac{p + \dfrac{a}{p}}{2}$.

Ceci conduit à introduire une suite (u_n) définit par $u_0 = p$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \dfrac{a}{u_n}}{2}$

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. Conclure.
6. Programmer un algorithme à l'aide du logiciel AlgoBox pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ avec une précision de 10^{-6}.
7. Que donne cet algorithme pour $a = 2$? pour $a = 7$?