Devoir maison 2

Exercice 1: 3 points

Démontrer le théorème ci-dessous :
Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite l alors pour tout entier naturel n, $u_n \leq l$.

On pourra supposer qu'il existe un entier n_0 tel que $u_n > l$

Exercice 2: 12 points

La suite (v_n) est définie pour tout nombre entier naturel n : $v_{n+1} = v_n^2$.

1. Posons $v_0 = 1$
   a. Calculer les premiers termes de la suite v_1, v_2 et v_3.
   b. Démontrer par récurrence que la suite (v_n) est constante.
2. Posons $v_0 = \dfrac{3}{4}$
   a. Calculer les premiers termes de la suite v_1, v_2 et v_3.
   b. Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = x$ et la courbe d'équation $y = x^2$.
   c. Placer v_0 sur l'axe des abscisses et construire sur cet axe v_1, v_2 et v_3 (laisser les traits de construction).
   d. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $0 \leq v_n \leq 1$.
   e. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   f. Conclure.
3. Posons $v_0 = \dfrac{3}{2}$
   a. Calculer les premiers termes de la suite v_1, v_2 et v_3.
   b. Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = x$ et la courbe d'équation $y = x^2$.
   c. Placer v_0 sur l'axe des abscisses et construire sur cet axe v_1, v_2 et v_3 (laisser les traits de construction).
   d. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $v_n \geq \dfrac{3}{2}$.
   e. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
   f. Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} \geq \dfrac{3}{2}v_n$.
   g. En déduire par récurrence que pour tout entier n, $v_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
   h. Conclure.

Exercice 3: 7 points

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et O_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(\mathrm{E}_1)$; $p_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{O}_2)$; $p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2)$.
3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.
   On suppose maintenant que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.
4. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leqslant k \leqslant n$) partent en direction de l'Est.
5. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.
   a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
   b. Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
   c. Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.