

Devoir maison 5

Exercice 1:

10 points

Soit f_k la fonction définie par $f_k(x) = (x^2 + x + k)e^{kx}$.

1. **Étude de f_0 :**

Étudier les variations et le signe de f_0 .

2. **Étude de f_1 :**

a. Étudier les variations de f_1 .

b. Étudier le signe de f_1 .

c. Étudier les limites de f_1 en $-\infty$ et $+\infty$.

3. **Étude de général pour $k \in \mathbb{R}$:**

a. Déterminer le signe de la fonction $g : x \mapsto -4x^3 + x^2 + 4$ sur \mathbb{R} .

b. Montrer que f'_k est du signe $kx^2 + (2+k)x + 1 + k^2$ sur \mathbb{R} .

c. Déterminer les variations de f_k selon les valeurs prises par k .

d. Étudier le signe de f_k selon les valeurs prises par k .

Exercice 2:

10 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 4i$, $z_B = 7 + 2i$, $z_C = 5 + 2\sqrt{3} + (3 + 2\sqrt{3})i$ et $z_D = 1$

1. Montrer que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. En déduire la nature du triangle ABC .

3. Placer les points A, B, C et D dans un repère en expliquant brièvement une méthode pour placer le point C.

4. Montrer que : $z_B - z_A = i(z_D - z_A)$

5. En déduire la nature du triangle DAB .

6. Soit E le point d'affixe $5 - 5i$.

a. Déterminer une écriture sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle du complexe $5 - 5i$.

b. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points $M(z)$ tels que $|z - 5 + 5i| = \sqrt{85}$

c. Montrer que $A \in \mathcal{E}$

7. a. Déterminer l'ensemble \mathcal{F} des points $M(z)$ tels que $|\bar{z} - 7 + 2i| = |\bar{z} - 1|$

b. Montrer que $A \in \mathcal{F}$