Devoir maison 7

Exercice 1: 8 points

Une entreprise de sous-traitance automobile vend des capteurs de température de liquide de refroidissement tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un capteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à $0,005$. Tous les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

Partie A

Une grande marque de voiture achète un premier lot de 200 capteurs à cette entreprise. On admet que le nombre de capteurs vendus par cette entreprise est suffisamment important pour que l'achat de 200 capteurs soit assimilé à 200 tirages indépendants avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de capteurs défaillants durant la première année.

1. Déterminer la loi suivie par X.
2. Quelle est la probabilité que deux capteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins trois capteurs tombent en panne au cours de la première année d'utilisation ?
4. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque capteur, est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.

1. Exprimer $P(Y \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,005$.
2. Quelle est la probabilité qu'un capteur dure au moins 5 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'un capteur dure plus de 5 ans sachant qu'il a duré plus de 4 ans ?
4. Quelle est la probabilité qu'un capteur dure 20 ans ou moins ?
5. Déterminer $E(Y)$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2: 8 points

On considère les fonctions f et g définie par :

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \texttt{et} \quad g(x) = 3\ln(x+3)$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f et (C') la courbe représentative de la fonction g dans le même repère que précédemment.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction g.
4. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant 0$ et interpréter graphiquement le résultat.
5. On considère la droite T_1 tangente à la courbe (C) au point d'abscisse -2 et la droite T_2 tangente à la courbe (C') au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.
   a. Déterminer une équation de la droite T_1 et une équation de la droite T_2.
   b. Quelle est la position relative de ces deux droites ?
   c. Tracer les droites T_1 et T_2 et la courbe (C') dans le même repère que la courbe (C).
6. On se propose de déterminer l'aire de la partie D du plan, limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.
   a. On considère la fonction G définie sur $]-3\ ;\ 3]$ par :
   $$G(x) = 3(x+3)\ln(x+3) - 3x.$$
   Vérifier que G est une primitive de la fonction g.
   b. Donner la valeur exacte de l'aire de la partie D en cm^2 puis une valeur approchée au mm^2 près.

Exercice 3: 4 points

A un feu tricolore, le signal destiné aux piétons est vert pendant 45 secondes et rouge pendant 105 secondes, en alternance. A 12 heures, le feu se met au rouge et un piéton se présente à un instant au hasard entre 12 h et 12 h 05 pour traverser. La variable aléatoire T qui donne le temps écoulé, en secondes, entre 12 h et l'heure d'arrivée du piéton suit une loi uniforme sur $I = [0; 300]$. Calculer la probabilité que le piéton :

a. trouve le feu vert et traverse sans attendre ;

b. n'attende pas le feu vert plus de 15 secondes ;

c. attende le feu vert plus de 30 secondes.