Devoir maison 8

Exercice 1: 6 points

On désigne par ln la fonction logarithme népérien. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2;2[$ par

$$f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-2;2[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;2[$ on a $f'(x)=\dfrac{4}{4-x^2}$.

   b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2;2[$.
3. La courbe $\mathcal{C}$ est tracée sur la feuille annexe. Hachurer sur cette feuille la partie $\mathcal{P}$ du plan constituée des points $M(x;y)$ tels que
$$0\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0\leqslant y\leqslant f(x).$$
   puis calculer en cm^2 l'aire de $\mathcal{P}$.

Exercice 2: 6 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère le point A d'affixe $z_{\text{A}}=1$ et le point B d'affixe $z_{\text{B}}=\text{i}$. À tout point M d'affixe $z_M=x+\text{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y\neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'}=-\text{i}z_M$. On désigne par I le milieu du segment $[\text{A}M]$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane $(\text{O}I)$ du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que B$M'=2\text{O}I$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M=2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   a. Déterminer la forme algébrique de z_M.

   b. Montrer que $z_{M'}=-\sqrt{3}-\text{i}$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

   c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite $(\text{O}I)$ et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_M=x+\text{i}y$ avec $y\neq 0$.

   a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

   b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

   c. Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

   d. Montrer que la droite $(\text{O}I)$ est une hauteur du triangle OBM'.

   e. Montrer que B$M'=2\text{O}I$.

Exercice 3: 8 points

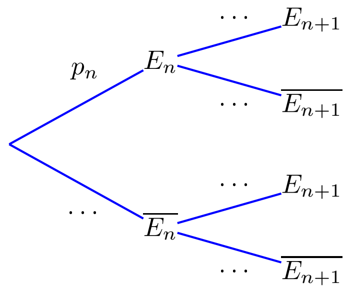
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1=0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0\leqslant p_n<1$.

1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P $< 0,05 - 10^{-\mathrm{K}}$
	P prend la valeur $0,2 \times \mathrm{P} + 0,04$
	J prend la valeur J +1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Annexe