# Correction de la question 4

On considère la suite $(t_n)$ définie pour tout entier non-nul par :

$$t_n = \frac{1}{4n^2-1}$$

1. $t_1 = \dfrac{1}{3}$ et $t_2 = \dfrac{1}{15}$.
2. Pour tout entier $n$ non-nul,

$$\begin{array}{rcl} t_{n+1}-t_n & = & \dfrac{1}{4(n+1)^2-1} - \dfrac{1}{4n^2-1} \\ & = & \dfrac{4n^2-1-(4(n+1)^2-1)}{(4(n+1)^2-1)(4n^2-1)} \\ & = & \dfrac{4n^2-1-(4n^2+8n-3)}{(4(n+1)^2-1)(4n^2-1)} \\ & = & \dfrac{-8n+2}{(4(n+1)^2-1)(4n^2-1)} \end{array}$$

Or pour tout entier $n$ non-nul, $-8n+2<0$ et $4(n+1)^2-1)(4n^2-1)>0$ donc la suite $(t_n)$ est décroissante. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n^2-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n^2} = 0$. La suite $(t_n)$ converge vers 0 et pour tout entier $n$, $t_n \geq 0$.

3. a. $V_1 = \dfrac{1}{3}$, $V_2 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15} = \dfrac{2}{5}$, $V_3 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35} = \dfrac{3}{7}$ et $V_4 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{63} = \dfrac{4}{9}$

   b. Tableur

   c. Pour tout entier $n$ non-nul,

$$\begin{array}{rcl} V_{n+1}-V_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} \\ & = & \dfrac{1}{4(n+1)^2-1} \\ & = & t_{n+1} \end{array}$$

   Or pour tout entier $n$, $t_n \geq 0$ donc la suite $(V_n)$ est croissante.

   d. A l'aide du tableur, on peut conjecturer que $(V_n)$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

   e. On montre que pour tout entier $k$ non-nul,

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2}$$

   f. $V_4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{14} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{4}{9}$

   g. Par la même méthode, on obtient que

$$\begin{array}{rcl} V_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \\ & = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4n+2} \\ & = & \dfrac{n}{2n+1} \end{array}$$

   h. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n+2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \dfrac{1}{2}$