Méthode d'Euler

Introduction à la méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet de construire la courbe d'une solution approchée à l'équation :

$$f'(x) = g(x)$$

Autrement dit, lorsqu'on connait la dérivée d'une fonction f, on peut grâce à la méthode d'Euler [1] tracer une courbe approchée de celle de f.

Principe de la méthode

f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$ dont on connait uniquement la fonction dérivée f' et la valeur y_0 en un point x_0 de $[a;b]$. On dit que $f(x_0) = y_0$ est la condition initiale. Le point $A_0(x_0; y_0)$ est sur la courbe.

Pour obtenir un nouveau point, on utilise la propriété ci-dessous :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. Si f est dérivable en a. Pour tout réel h tel que $a + h \in I$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0$$

donc

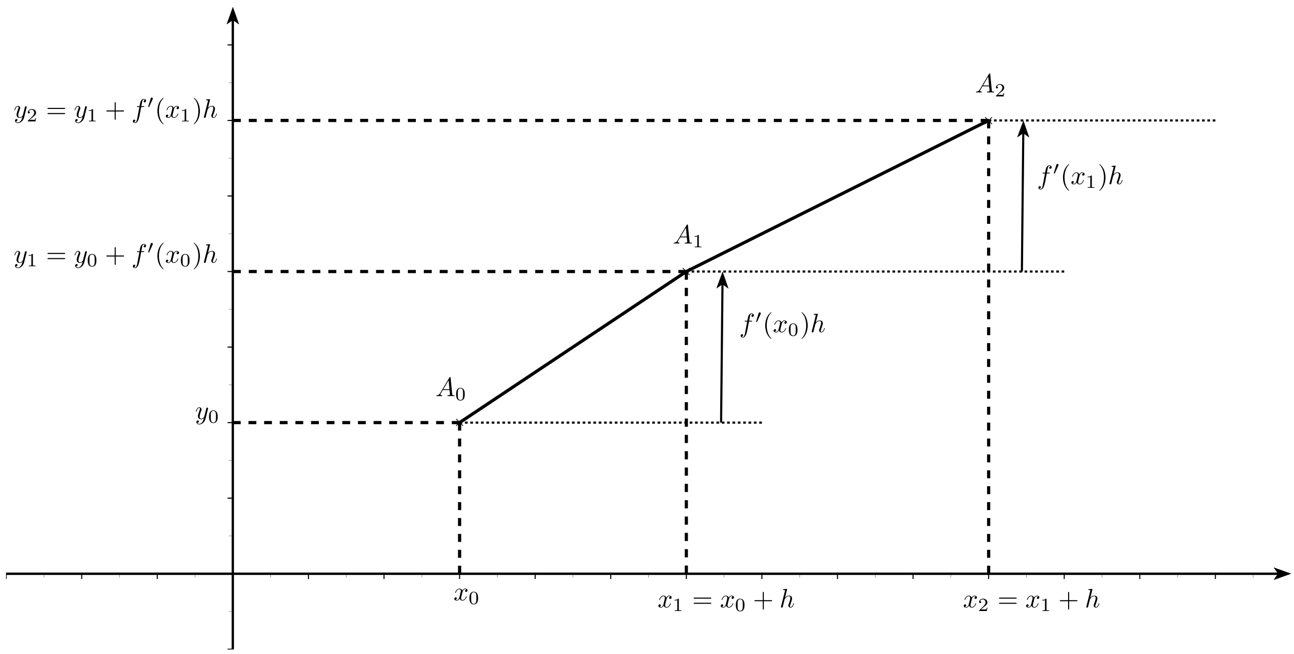
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \varepsilon(h) \quad avec \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

soit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad avec \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

L'idée est de choisir un réel h strictement positif puis de remplacer $f(x_0 + h)$ par $f(x_0) + f'(x_0)h$. On commet alors une erreur de $h\varepsilon(h)$ qu'on peut rendre aussi petite que l'on veut en choisissant une valeur de h assez petite.

On obtient alors un nouveau point $A_1(x_1; y_1)$ où $x_1 = x_0 + h$ et $y_1 = f(x_0) + f'(x_0)h = y_0 + f'(x_0)h$.



On réitère le processus pour obtenir le point $A_2(x_2; y_2)$ où $x_2 = x_1 + h$ et $y_2 = y_1 + f'(x_1)h$ et donc tous les points $A_n(x_n; y_n)$ où $x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + f'(x_n)h$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On remarque que les erreurs se cumulent. En effet, à chaque étape on approxime $f(x_{n+1})$ par $y_n + f'(x_n)h$ et pas par $f(x_n) + f'(x_n)h$

1. Leonhard Euler (1707-1783) était un mathématicien suisse. Il décrivit sa méthode dans « *Institutionum Calculi Intergalis* »en 1768

Application 1

f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que la méthode d'Euler conduit à choisir $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{1+x_n^2}$.
2. Tracer à l'aide d'un tableur les courbes correspondantes pour divers valeurs de h pour $x \in [0; 10]$.

Application 2

f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = 2x + 3$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que la méthode d'Euler conduit à choisir $y_{n+1} = y_n + (2x_n + 3)h$.
2. Tracer à l'aide d'un tableur les courbes correspondantes pour divers valeurs de h pour $x \in [0; 10]$.
3. Déterminer la fonction f.
4. En déduire l'erreur commise à chaque étape en fonction de h.