

Calculs d'aire

Soit f une fonction continue, croissante et positive sur $[a; b]$ et soit n un entier tel que $n \geq 2$. On appelle s_n la somme des aires des rectangles inférieurs définie par

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

et S_n la somme des aires des rectangles supérieurs définie par

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

1. A quoi correspond $\frac{b-a}{n}$?
2. Exprimer s_3 et S_3 pour la fonction x^2 entre $a = 1$ et $b = 4$.
3. Écrire un algorithme permettant de déterminer s_n et S_n pour tout entier n .
4. Entrer cet algorithme dans le logiciel AlgoBox et tester avec $f(x) = x^2$ sur $[0; 1]$.
5. Utiliser cet algorithme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de :

a. $\int_0^5 e^x \mathrm{d}x$

b. $\int_{-1}^{20} 1 + x^2 \mathrm{d}x$

c. $\int_1^2 \sqrt{2x+3} \mathrm{d}x$

d. $\int_1^e \frac{1}{x} \mathrm{d}x$

6. Vérifier vos réponses à l'aide du logiciel GeoGebra.
7. Comparer $\int_1^b \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ et $\ln(b)$ pour $b > 1$. Quelle conjecture peut-on émettre ?
8. Vérifier votre conjecture à l'aide du logiciel GeoGebra.