Intégration par parties I

Exercice 1:
Soit u et v deux fonctions dérivables telles que u' et v' soit continues sur un intervalle $[a;b]$.
1. Déterminer la fonction dérivée de uv.
2. En déduire que $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathtt{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathtt{d}x$

Exercice 2:
Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^1 te^t\mathtt{d}t$

Exercice 3:
Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)\mathtt{d}x$

Exercice 4:
Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_2^4 \frac{lnx}{x^2}\mathtt{d}x$

Exercice 5:
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$. On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe $(\mathcal{C})$ susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. a. Interpréter graphiquement $g(2)$.
   b. Montrer que $0 \leqslant g\,(2) \leqslant 2,5$.
3. a. Soit x un réel supérieur à 2.
   Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Partie B
On admet que pour tout réel $t, f(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-t}+1$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que pour tout réel x, $g\,(x) = x\,(1-\mathrm{e}^{-x})$.
3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.