Intégration par parties II

Exercice 1:
Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^1 (1-x)e^{-x}\mathtt{d}x$$

Exercice 2:
Trouver la primitive de $x :\longmapsto ln(x)$ qui s'annule en 1 à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 3:
Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^\pi sin(x)e^x\mathtt{d}x$$

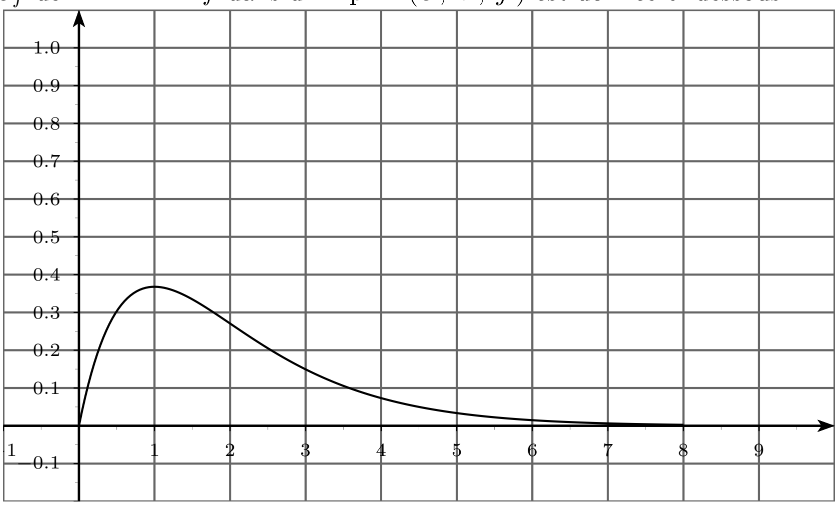
Exercice 4:
Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

Partie A

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ est donnée ci-dessous :



1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?
2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3. Tracer sur le repère ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g.
4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$?
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Partie B

L'objectif de cette partie est de calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

1. Hachurer sur l'annexe cette partie du plan.
2. Déterminer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $H(x) = -\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$
   a. Calculer la dérivée H' de la fonction H.
   b. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction g.
4. Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.