

Approximation de racine $\sqrt{ab}$

Soient a et b deux entiers donnés tels que $0 < a < b$. L'objectif de cette activité est d'approximer $\sqrt{ab}$.

1. Montrer que

$$a < \sqrt{ab} < b$$

2. Montrer que

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

L'encadrement $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ est meilleur que l'encadrement que $a < \sqrt{ab} < b$,

d'où l'idée de réitérer le procédé en remplaçant a par $\frac{2ab}{a+b}$ et b par $\frac{a+b}{2}$.

Ceci conduit à introduire les deux suites (a_n) et (b_n) définies conjointement par :

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et pour tout entier naturel } n, a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

De plus, par construction, on a :

$$a \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b$$

3. Montrer que pour tout entier n ,

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

4. En déduire que pour tout entier n ,

$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Conclure.

5. Montrer que pour tout entier n ,

$$0 \leq \sqrt{ab} - a_n \leq b_n - a_n$$

Conclure.

6. Compléter et entrer le programme ci-dessous dans le logiciel Algobox :

```

1  VARIABLES
2    a EST_DU_TYPE NOMBRE
3    b EST_DU_TYPE NOMBRE
4    i EST_DU_TYPE NOMBRE
5    n EST_DU_TYPE NOMBRE
6    c EST_DU_TYPE NOMBRE
7  DEBUT_ALGORITHME
8    LIRE a
9    LIRE b
10   LIRE n
11   POUR i ALLANT_DE 1 A n
12     DEBUT_POUR
13       c PREND_LA_VALEUR a
14       a PREND_LA_VALEUR .....
15       b PREND_LA_VALEUR .....
16       AFFICHER "Etape "
17       AFFICHER* i
18       AFFICHER* a
19       AFFICHER* b
20     FIN_POUR
21  FIN_ALGORITHME
```

7. Montrer que la suite (a_nb_n) est constante et que :

$$a < \sqrt{a_nb_n} < b$$