Éléments de correction

1. Vu en classe.
2. Cette question permet de montrer que (a_n) est croissante et majorée par $\sqrt{ab}$ donc converge. Elle permet aussi de montrer que (b_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{ab}$ donc converge. Rien ne nous permet de dire que à ce moment que (a_n) et (b_n) convergent vers $\sqrt{ab}$.
3. Cette question permet de préparer le raisonnement par récurrence de question suivante.
4. Soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété $b_n - a_n \leq \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $b_0 - a_0 \leq \dfrac{b_0 - a_0}{2^0}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : On fixe n un entier naturel et on suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour cet entier.

   D'après la question précédente, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{b_n - a_n}{2}$ et d'après l'hypothèse de récurrence $b_n - a_n \leq \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$ donc

   $$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{\frac{b_0 - a_0}{2^n}}{2}$$

   soit

   $$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

   La propriété est alors vraie au rang $(n+1)$.

   Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier n,

   $$b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

   De plus comme $a_n \leq b_n$ pour tout entier n, on a :

   $$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$.

   On en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$ et comme les suites (a_n) et (b_n) convergent, on en conclut qu'elles convergent vers une même limite.
5. Par construction des suites (a_n) et (b_n), on a pour tout entier n :

   $$a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \sqrt{ab} \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b$$

   On en déduit immédiatement que pour tout entier n,

   $$0 \leq \sqrt{ab} - a_n \leq b_n - a_n$$

   On utilise là encore le théorème des gendarmes puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{ab} - a_n = 0$ soit (a_n) converge vers $\sqrt{ab}$ et donc (b_n) converge vers $\sqrt{ab}$.