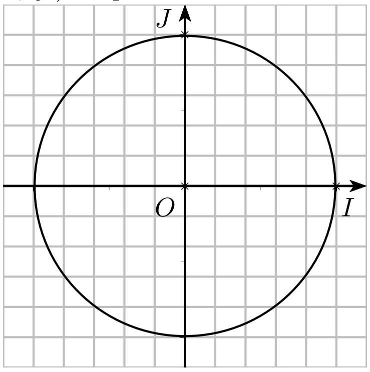
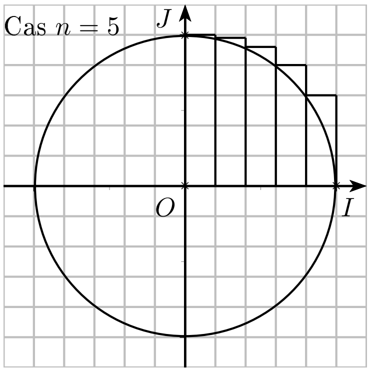
Approximation du nombre π

On se place dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.



1. Déterminer l'aire du disque de centre l'origine et de rayon 1.
2. Déterminer l'équation du cercle de centre l'origine et de rayon 1.
3. En déduire l'expression de la fonction f associée au quart de cercle dont les points ont des coordonnées positives.
4. Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses sur $[0; 1]$.
5. On construit à présent la suite (S_n) définie de la façon suivante (pour $n \geq 2$) :
   - On partage le segment $[OI]$ en n segment de même longueur.
   - On dessine n rectangle comme dans la figure ci-dessous :



   - S_n est la somme des aires des n rectangles ainsi construits.

   a. Déterminer S_2 et S_3.

   b. Exprimer S_n en fonction de n.

   c. Conjecturer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Compléter l'algorithme ci-dessous pour calculer S_n en fonction de n.

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
s EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  Lire ...
  s PREND_LA_VALEUR ...
  POUR i ALLANT_DE 0 A ...
    DEBUT_POUR
    s PREND_LA_VALEUR ...
    FIN_POUR
  AFFICHER ...
FIN_ALGORITHME
```

7. Donner la valeur obtenue pour $n = 5000$.
8. Pour obtenir une approximation du nombre π, Archimède(III siècle avant J.C.) a utilisé deux polygones réguliers de 96 côtés : l'un inscrit dans le cercle, l'autre circonscrit au cercle, ce qui lui a permis d'obtenir l'encadrement :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

   Comparer votre résultat avec la précision obtenue par Archimède.