QUELQUES IDÉES DE SUJETS POUR MATH EN JEANS EN 2012-2013

FRANÇOIS DUCROT

(1) **Découpages. Comptons les morceaux !**
Étant données n droites distinctes dans le plan, on se demande combien de zones elles peuvent découper dans le plan (une droite découpe 2 zones, deux droites découpent 3 ou 4 zones,..). On peut poser la même question pour le découpage de l'espace par des plans.
Après cette mise en jambes, on pourra regarder un problème plus amusant : On dispose n points sur un cercle et on relie deux à deux ces points par des segments. Les segments ainsi formés découpent le disque en un certain nombre de zones. Combien ? Pour 2 points on a 2 zones, pour 3 points on a 4 zones, pour 4 points cela fait 8 zones ; on semble donc voir une loi simple à exprimer. Mais si on continue un peu plus loin, on s'aperçoit que la règle qui semble évidente doit être modifiée !

(2) **Recollons les morceaux !**
Prenons deux polygones A et B dans le plan. On veut découper A en plusieurs petits polygones, et recoller ces petits polygones pour obtenir B. On comprend facilement qu'il est nécessaire que A et B aient la même aire. On utilise ainsi cette méthode de découpage pour démontrer le théorème de Pythagore. La question qui se pose est de savoir si, étant donnés deux polygones de même aire, on peut toujours passer de l'un à l'autre par découpage et recollement, et si oui, comment ?

(3) **En route vers le chaos**
On considère un nombre réel $a > 0$, et on fixe un réel x_0. On construit une suite de nombres en calculant $x_1 = 1 - ax_0^2$, $x_2 = 1 - ax_1^2$, etc. Pour des valeurs de a proches de zéro, on peut voir assez facilement que la suite de nombres se comporte très simplement. Plus a augmente, plus ça se complique, pour arriver à une situation chaotique. On se propose d'essayer de tester ce phénomène numériquement, grâce à un calcul sur ordinateur, et de justifier ensuite certain phénomènes observés.
La même question peut être posée avec une suite vérifiant $x_1 = a(1-x_0^2)$, $x_2 = a(1-x_1^2)$, etc, lorsque a est un nombre compris entre 0 et 4.

(4) **Triangles et autres figures magiques**
On regarde un triangle A, B, C, ainsi que les milieux A', B', C' des côtés. On cherche à déposer sur ces 6 points les nombres 1, 2, 3, 4, 5 ,6 et on dira que le triangle obtenu est magique si les sommes des nombres sur chacun des côtés sont égales. On veut déterminer *tous* les triangles magiques. On cherchera ensuite des variantes de ce problème, en regardant un tétraèdre à la place du triangle, ou en mettant 4 nombres au lieu de 3 sur chaque côté, ou bien en regardant d'autres nombres que les premiers entiers.

(5) **Fractions égyptiennes**
Si on se donne une fraction de deux entiers p et q. On se demande s'il est possible de trouver des entiers positifs $p_1, \dots, p_r$, <u>tous différents</u>, vérifiant :
$$\frac{p}{q} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_r}$$
Par exemple :
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42}$$

ou encore
$$\frac{7}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}$$

(6) **Les doigts coupés**
On prend une ficelle d'environ 1 mètre dont on attache les deux bouts ensembles pour former une boucle. On met cette boucle autour du petit doigt d'une main, on croise les deux brins, on passe autour du majeur, on croise de nouveau dans le même sens et on continue jusu'à l'index. On fait ensuite le tour du pouce et on revient en sens inverse en croisant à chaque fois en sens inverse. (une démonstration sera plus claire que le texte !).
Si on tire la ficelle, les doigts sont serrés les uns contre les autres. Si maintenant, on replie le pouce et on tire fort, la ficelle se défait entièrement, comme si on avait coupé d'un coup les 4 doigts.
On cherchera à comprendre la configuration utilisée, à voir comment décrire mathématiquement de façon générale une telle configuration, et à reconnaitre quelles configurations se dénouent. Ce problème est un exemple de question de *topologie*, qui regarde les configurations géométriques, en faisant abstraction des déformations (si une ficelle est nouée, on a beau la bouger un peu, elle reste nouée).

(7) **Le jeu de S.O.S.**
Le jeu de S.O.S. se joue à deux joueurs. Ils disposent d'une grille linéaire constituée de n cases. Chaque joueur à son tour inscrit dans la case vide de son choix l'une des deux lettres **S** ou **O**. Celui qui, au moment ou il inscrit sa lettre, forme la suite **SOS** a gagné. Suivant la longueur n, le premier où le second joueur peut être sûr de gagner, s'il joue bien ; pour d'autres valeurs de n deux joueurs qui jouent bien tous les deux sont certains d'arriver à une situation nulle. Il s'agit d'analyser ce jeu, et de décrire les stratégies optimales.

(8) **Déplacements sur une grille**
Considérons une grille dessinée sur une feuille de papier. Un pion est placé sur une case de la grille. Deux joueurs déplacent chacun à son tour le pion, soit vers la gauche, soit vers le bas, d'autant de cases qu'il le souhaite. Le premier qui arrive à mettre le pion dans case en bas à gauche a gagné. Trois minutes de réflexion suffisent à comprendre comment gagner à ce jeu ; mais si maintenant, la grille n'est plus dans le plan, mais dans l'espace, le problème n'est plus aussi simple.
On peut modifier également le jeu en revenant à un grille en deux dimensions, mais en disposant plusieurs pions sur cette grille. Comme précédemment, chaque joueur déplace à son tour le pion de son choix d'autant de cases qu'il le souhaite. On autorise à mettre plusieurs pions sur la même case. Celui qui n'a plus de possibilité de jouer (parce que tous les pions sont en bas à gauche) a perdu.
On se propose de décire les stratégies optimales pour ces différents jeux.

(9) **Celui qui prend le dernier pion a gagné**
Tout le monde connait ce jeu simple : deux joueurs sont devant un tas de pions. Chacun à son tour prend un certain nombre de pions dans le tas en respectant une certaine règle (l'exemple le plus simple de règle est celle où chaque joueur prend 1, 2 ou 3 pions, mais il y en a bien d'autres). Le joueur qui prend le dernier pion a gagné.
En réfléchissant un petit peu, on trouve très vite quelle doit être la stratégie des joueurs. Mais si on complique un peu le jeu en répartissant les pions en différents tas, et en imposant qu'à chaque tour le joueur choisisse un tas et ne pioche que dans ce tas, cela devient beaucoup moins évident. On se propose d'étudier ce jeu.