Démonstrations par récurrence

Exercice 1:
Soit la suite u définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = -u_n + 4$.
Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et montrer le par récurrence.

Exercice 2:
La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 < u_n < 1$.

Exercice 3:
La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 4:
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
Démontrer par récurrence que la suite est croissante.

Exercice 5:
Écrire sous forme d'une somme puis démontrer l'égalité par récurrence :

1. $1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$
2. $1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 6:
Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,
$3^n \geq 2^n + 5n$.

Exercice 7:
Démontrer que pour tout entier naturel n,
$4^n + 5$ est un multiple de 3.

Exercice 8:
Conjecturer l'expression de la somme des n premiers entiers impairs et montrer le par récurrence.

Exercice 9:
On considère les suites (x_n) et (u_n) définies par :
$x_0 = 0$, $y_0 = 11$ et pour tout entier naturel n :
$x_{n+1} = 0.8x_n - 0.6y_n + 2$ et $y_{n+1} = 0.6x_n + 0.8y_n - 2$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $(x_n - 4)^2 + (y_n - 2)^2 = 97$
Où se trouvent les points de coordonnées (x_n, y_n) ?

Exercice 10:
Les nombres de Fibonacci sont définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1. Calculer les 10 premiers termes de la suite
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $a_n \geq 1$
3. On pose pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
   (a) Démontrer que la suite u est telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$
   (b) On pose φ (appelé nombre d'or) la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Vérifier que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - \varphi = \dfrac{\varphi - u_n}{\varphi u_n}$
   (d) En déduire que $|u_{n+1} - \varphi| \leq \dfrac{1}{\varphi}|u_n - \varphi|$
   (e) Démontrer par récurrence que $|u_n - \varphi| \leq \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|$
   (f) En déduire que la suite u converge vers φ