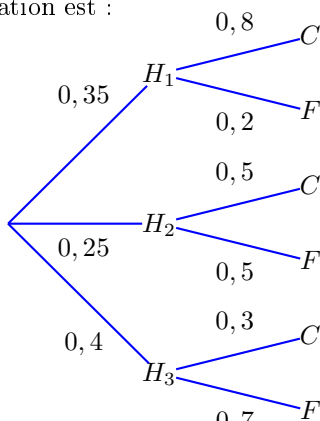


# Corrigé du bac blanc 1

## Exercice 1:

4 points

1. a. L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



- b. La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur  $H_3$  est :

$$P(C \cap H_3) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

- c. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de l'événement  $C$  est :

$$P(C) = P(C \cap H_1) + P(C \cap H_2) + P(C \cap H_3) = 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525$$

- d. La probabilité qu'un arbre ait été acheté chez l'horticulteur  $H_1$  sachant que c'est un conifère est :

$$P_C(H_1) = \frac{P(C \cap H_1)}{P(C)} = \frac{0,28}{0,525} \simeq 0,533$$

2. a. Les tirages sont au hasard et avec remise donc il s'agit d'une succession d'épreuve de Bernoulli indépendantes d'où  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = P(C) = 0,525$ .

- b. La probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères est :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0,525^5 0,475^5 \simeq 0,243$$

- c. La probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus, c'est à dire au plus huit conifères est :

$$P(X \leq 8) = 1 - (P(X = 9) + P(X = 10)) \simeq 0,984$$

## Exercice 2:

5 points

- Proposition 1 :**  $|z - i| = |z + 1| \iff |z - i| = |z - (-1)|$  donc l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité  $|z - i| = |z + 1|$  est la médiatrice du segment  $[AB]$  avec  $A(i)$  et  $B(-1)$ . La proposition est vraie.
- Proposition 2 :**  $1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$  donc  $(1 + i\sqrt{3})^4 = 2^4 e^{\frac{4i\pi}{3}} = 16e^{\frac{4i\pi}{3}} = -8 - 8\sqrt{3}i$ . La proposition est fausse.
- Proposition 3 :**  $\lim_{x \rightarrow 2} 7x^3 + 6x - 2 = 66$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} 4 - x^2 = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^3 + 6x - 2}{4 - x^2} = \infty$ . La proposition est fausse.
- Proposition 4 :**  $4x^3 = 4x + 1 \iff 4x^3 - 4x - 1 = 0$ . La fonction  $f : x \mapsto 4x^3 - 4x - 1$  est dérivable et  $f'(x) = 12x^2 - 4 = 12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 12\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ . Ainsi  $f$  admet le tableau de variation suivant :

|         |    |                       |                      |    |
|---------|----|-----------------------|----------------------|----|
| $x$     | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 2  |
| $f'(x)$ | +  | 0                     | -                    | +  |
| $f(x)$  | -1 | $> 0$                 | $< 0$                | 23 |

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence d'exactly trois solutions pour l'équation  $f(x) = 0$ . La proposition est vraie.

- Proposition 5 :** On note que  $f(x) = e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$  donc  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$  soit  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$ . La proposition est fausse.

**Exercice 3:**

5 points

1. a.  $f(1) = 2$  et  $f'(1) = 0$ .

b. Pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b \ln x) \times 1}{x} = \frac{b - a - b \ln x}{x} = \frac{(b - a) - b \ln x}{x}$

c.  $f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a + b \ln 1}{1} = 2 \Rightarrow a = 2$  et  $f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{(b - a) - b \ln 1}{1} = 0 \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow b = 2$  donc pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $f(x) = \frac{2 + 2 \ln x}{x}$

2. a. Pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{(b - a) - b \ln x}{x} = \frac{-2 \ln x}{x}$  donc  $f'(x)$  a le même signe que  $-\ln x$ .

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + 2 \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ . Pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

c. Tableau de variations de la fonction  $f$  :

| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---------|---|---|-----------|
| $f'(x)$ |   | + | 0         |
| $f(x)$  |   | 2 | 0         |

3. a. Sur  $]0, 1]$ ,  $f$  est une fonction continue, strictement croissante.  $1 \in \left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x); f(1) \right]$  donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution notée  $\alpha$ .

b.  $f(5) > 1$  et  $f(6) < 1$  donc  $n = 5$ .

4. a. Algorithme :

|         | étape 1       | étape 2       | étape 3       | étape 4        | étape 5        |
|---------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| $a$     | 0             | 0             | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$  | $\frac{7}{16}$ |
| $b$     | 1             | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |
| $b - a$ | 1             | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$  | $\frac{1}{16}$ |
| $m$     | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ |                |

b.  $a$  et  $b$  sont les deux bornes d'un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$

c. Il suffit de poser  $a = 5$  et  $b = 6$ .

1. a.  $u_1 = 2 + \frac{1}{3} \approx 2,33$ ;  $u_2 = 2 + \frac{8}{9} \approx 2,89$ ;  $u_3 = 3 + \frac{16}{27} \approx 3,59$ ;  $u_4 = 4 + \frac{32}{81} \approx 4,40$

b. On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante.

2. a. Pour tout entier naturel  $n$ , posons la propriété  $\mathcal{P}_n$  suivante :  $u_n \leq n + 3$ .

*Initialisation* : Puisque l'on a  $u_0 = 2$  et  $0 + 3 = 3$  donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

*Hérédité* : Pour un entier  $n$  naturel donnée, on suppose la propriété  $\mathcal{P}_n$  vraie.

On a  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$  et  $u_n \leq n + 3$  donc  $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(n + 3) + \frac{1}{3}n + 1$  soit  $u_{n+1} \leq n + 3 \leq (n + 1) + 3$  d'où la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  vraie.

*Conclusion* : Par le principe de récurrence, la propriété  $\mathcal{P}_n$  vraie pour tout entier  $n$ , c'est à dire que pour tout entier naturel  $n$ , on a bien  $u_n \leq n + 3$ .

b.  $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

c. D'après la question précédente,  $n + 3 - u_n \geq 0$  pour tout entier  $n$  donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  ainsi la suite  $(u_n)$  est croissante.

3. a.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$$

Donc  $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ . La relation de récurrence obtenue confirme que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $q = \frac{2}{3}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 0 = 2$ .

b. Ainsi  $v_n = v_0 \times q^n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$  donc  $u_n = v_n + n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ .

c. Puisque la raison  $q$  est strictement comprise entre  $-1$  et  $1$ , on en déduit que la limite de la suite  $v$  est  $0$ , et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite  $u$  est donc  $+\infty$ , et la suite  $u$  est donc divergente.

4. a.  $S_n$  est la somme de  $n + 1$  termes de la suite  $u_n$ . Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme  $u_n$  est la somme de  $v_n$  et de  $n$ , donc en réordonnant les termes,  $S_n$  est la somme de deux « sous-sommes » : celle des  $n + 1$  premiers termes de la suite  $v$  et celle des  $n + 1$  premier entiers naturels.

La première sous-somme est une somme des  $n + 1$  premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

La seconde sous-somme est la somme des  $n + 1$  premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des  $n + 1$  premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme  $0$  et de raison  $1$ , donc elle vaut :

$$\frac{0 + n}{2} \times (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} \text{ (résultat classique).}$$

Finalement, on a  $S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n + 1)}{2}$ .

b. On en déduit :

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n + 1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2}$