CORRECTION BAC BLANC 2

Exercice 1: 5 points

PARTIE A

On exécute l'algorithme en saisissant $N=2$. **(0.5 pts)**

K	W	U	V
0	—	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

PARTIE B

1. **a.** Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}-\frac{2u_n+v_n}{3}=\frac{3(u_n+3v_n)}{12}-\frac{4(2u_n+v_n)}{12}$$
$$=\frac{3u_n+9v_n-8u_n-4v_n}{12}=\frac{5v_n-5u_n}{12}=\frac{5}{12}(v_n-u_n)$$ **(0.5 pts)**

b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n=v_n-u_n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $w_0=v_0-u_0=10-2=8$.

D'après le cours (forme explicite d'une suite géométrique) on peut dire que, pour tout entier naturel n, $w_n=8\left(\frac{5}{12}\right)^n$. **(0.5 pts)**

2. **a.** $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+v_n}{3}-\frac{3u_n}{3}=\frac{2u_n+v_n-3u_n}{3}=\frac{v_n-u_n}{3}=\frac{w_n}{3}$

Or, pour tout n, $w_n=8\left(\frac{5}{12}\right)^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n>0$ et donc que, pour tout n, $u_{n+1}-u_n>0$.

Donc la suite (u_n) est croissante. **(0.5 pts)**

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-\frac{4v_n}{4}=\frac{u_n+3v_n-4v_n}{4}=\frac{u_n-v_n}{4}=\frac{-w_n}{4}$$

Et comme $w_n>0$, on peut dire que $v_{n+1}-v_n<0$ pour tout n.

Donc la suite (v_n) est décroissante. **(0.5 pts)**

b. On a vu que, pour tout n, $w_n>0$; donc, pour tout n, $v_n-u_n>0$ c'est-à-dire $v_n>u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n\le v_0 \iff v_n\le 10$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n>u_n \\ v_n\le 10\end{array}\right\}\implies u_n\le 10$. **(0.5 pts)**

La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n\ge u_0 \iff u_n\ge 2$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n>u_n \\ u_n\ge 2\end{array}\right\}\implies v_n\ge 2$. **(0.5 pts)**

c. La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ_u.

La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel ℓ_v. **(0.5 pts)**

3. La suite (w_n), définie par $w_n=v_n-u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_v-\ell_u$.

Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et $-1<\frac{5}{12}<1$; donc on peut dire que la suite (w_n) est convergente vers 0.

La limite d'une suite est unique donc $\ell_v-\ell_u=0$ et donc $\ell_v=\ell_u$; les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite qu'on appelle ℓ. **(0.5 pts)**

4. $t_{n+1}=3u_{n+1}+4v_{n+1}=3\times\frac{2u_n+v_n}{3}+4\times\frac{u_n+3v_n}{4}=2u_n+v_n+u_n+3v_n$

$=3u_n+4v_n=t_n$ donc la suite (t_n) est constante. De plus $t_0=3u_0+4v_0=3\times 2+4\times 10=6+40=46$

Ainsi, pour tout n, $t_n=t_0=46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.

Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n=3u_n+4v_n$ est convergente vers $3\ell+4\ell=7\ell$. La limite d'une suite est unique donc $7\ell=46 \iff \ell=\frac{46}{7}$.

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est donc $\frac{46}{7}$. **(0.5 pts)**

Exercice 2: 5 points

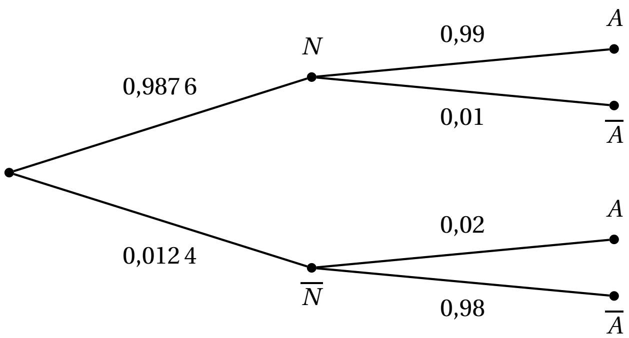
Tous les résultats numériques devront être arrondis au dix-millième

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.
Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1. Une bille est dans la norme si son diamètre est entre 9 et 11 mm ; donc la probabilité qu'une bille soit dans la norme est $P(9 \leq X \leq 11) = P(X \leq 11) - P(X \leq 9)$.
La probabilité que la bille soit hors norme est donc :
$1-(P(X \leq 11)-P(X \leq 9)) = 1-(0{,}99379034-0{,}00620967) = 1-0{,}98758067 = 0{,}01241933$; donc une valeur approchée à $0{,}0001$ de la probabilité qu'une bille soit hors norme est $0{,}0124$. **(0.5 pts)**

2. **a.** On construit un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé : **(0.5 pts)**



b. D'après la formule des probabilités totales : **(0.25 pts)**
$$P(A) = P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A)$$
$$= 0{,}9876 \times 0{,}99 + 0{,}0124 \times 0{,}02 = 0{,}977724 + 0{,}000248 = 0{,}977972$$
$$\approx 0{,}9780$$ **(0.5 pts)**

La probabilité de A est $0{,}9780$ (arrondie au dix-millième).

c. On cherche : $P_A\left(\overline{N}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{N}\right)}{P(A)} = \dfrac{0{,}000248}{0{,}977972} \approx 0{,}0003$ **(0.75 pts)**
La probabilité qu'une bille acceptée soit hors norme est $0{,}0003$ (arrondie au dix-millième).

Partie B

1. La probabilité qu'une bille soit hors norme est $0{,}0124$: on admet que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
Donc la variable aléatoire Y qui, à tout sac de 100 billes, associe le nombre de billes hors norme, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0124$. **(0.5 pts)**

2. L'espérance mathématique et l'écart type d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p sont respectivement np et $\sqrt{np(1-p)}$.
Donc $E(Y) = np = 100 \times 0{,}0124 = 1{,}24$ **(0.5 pts)**
et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}0124 \times 0{,}9876} \approx 1{,}1066$. **(0.5 pts)**

3. La probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme est $P(Y=2)$.
$P(Y=2) = \dbinom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \dbinom{100}{2} \times 0{,}0124^2 \times 0{,}9876^{98} \approx 0{,}02241$. **(0.75 pts)**

4. Un sac de billes contient au plus une bille hors norme est l'événement $(Y \leqslant 1)$.
$$P(Y \leqslant 1) = P(Y=0) + P(Y=1)$$
$$= \binom{100}{0} \times 0{,}0124^0 \times 0{,}9876^{100} + \binom{100}{1} \times 0{,}0124^1 \times 0{,}9876^{99}$$
$$\approx 0{,}2871 + 0{,}3605 \approx 0{,}6476.$$ **(0.75 pts)**

Exercice 3: 5 points

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.
   Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$: $g'(x) = 2x\mathrm{e}^x > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   La fonction g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. **(0.5 pts)**

   b. $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$. Dressons le tableau de variations de g : **(1 pt)**

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}-1$	$\nearrow$	

   D'après ce tableau de variations, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$; on appelle a cette solution.
   $g(0,703) \approx -0,0018 < 0$ et $g(0,704) \approx 0,002 > 0$ donc $a \in [0,703;0,704]$. **(0.25 pts)**

   c. D'après le tableau de variations de g :
   - $g(x) < 0$ sur $[0;a[$
   - $g(x) > 0$ sur $]a;+\infty[$ **(0.5 pts)**

2. **Étude de la fonction f**

   a.
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x = 1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$$ **(0.5 pts)**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$ **(0.5 pts)**

   b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ **(0.5 pts)**

   c. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
   On dresse le tableau de variation de f : **(0.5 pts)**

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

   d. D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.
   $f(a) = \mathrm{e}^a + \dfrac{1}{a}$. Or a est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc
   $g(a) = 0 \iff a^2\mathrm{e}^a - 1 = 0 \iff a^2\mathrm{e}^a = 1 \iff \mathrm{e}^a = \dfrac{1}{a^2}$.
   On en déduit que $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$ et on a donc démontré que la fonction f admettait pour minimum sur $]0\,;\,+\infty[$ le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$. **(0.5 pts)**

   e. On a successivement(en valeurs approchées) :

$$\begin{array}{rcl} 0,703 < & a & < 0,704\\ 0,4942 < & a^2 & < 0,4957\\ \dfrac{1}{0,4957} < & \dfrac{1}{a^2} & < \dfrac{1}{0,4942}\\ 2,017 < & \dfrac{1}{a^2} & < 2,024 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 0,703 < & a & < 0,704\\ \dfrac{1}{0,704} < & \dfrac{1}{a} & < \dfrac{1}{0,703}\\ 1,420 < & \dfrac{1}{a} & < 1,423 \end{array}$$

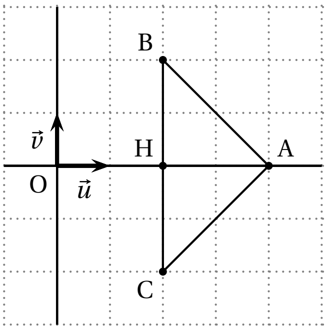
   donc par somme : $2,017 + 1,420 < \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a} < 2,024 + 1,423$ et donc :
   $3,43 < m < 3,45$ **(0.25 pts)**

Exercice 4: 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1. $(1+\mathrm{i})^{4n} = \left((1+\mathrm{i})^4\right)^n$ et $(1+\mathrm{i})^4 = \left((1+\mathrm{i})^2\right)^2$
$(1+\mathrm{i})^2 = 1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = 1+2\mathrm{i}-1 = 2\mathrm{i}$; donc $(1+\mathrm{i})^4 = (2\mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i}^2 = -4$
Donc $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$; **la proposition est vraie.**

2. On cherche les solutions de l'équation (E) : $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$.
Il y a $z = 4$ qui annule $z-4$.
Pour $z^2-4z+8 = 0$: $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 8 = 16-32 = -16 < 0$
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-(-4)+\mathrm{i}\sqrt{16}}{2} = \dfrac{4+4\mathrm{i}}{2} = 2+2\mathrm{i}$ et $z_2 = 2-2\mathrm{i}$
L'équation (E) admet pour solutions $\left\{4,\ 2+2\mathrm{i},\ 2-2\mathrm{i}\right\}$.
Représentons les points dont les affixes sont solutions de (E) :



Le triangle ABC est isocèle en A car les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe $\left(\mathrm{O}, \vec{u}\right)$ et A appartient à cet axe ; donc le milieu H de [BC] est aussi le pied de la hauteur issue de A dans le triangle.

H a pour affixe 2 donc AH=2 ; de plus $\mathrm{BC} = |2+2\mathrm{i}-2+2\mathrm{i}| = |4\mathrm{i}| = 4$.

L'aire de ce triangle vaut donc :
$\dfrac{\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}}{2} = \dfrac{4\times 2}{2} = 4$

La proposition est fausse.

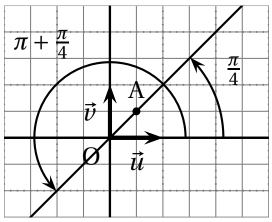
3. Soit α un nombre réel quelconque ; on sait que $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$.

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} &= 1+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^2 = 1+(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^2 = 1+\cos^2\alpha+2\mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha+\mathrm{i}^2\sin^2\alpha\\ &= \cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha+2\mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha\\ &= 2(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\cos\alpha = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos\alpha\end{aligned}$$

La proposition est vraie.

4. Le nombre complexe z_{A} a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$ donc le nombre complexe $(z_{\mathrm{A}})^n$ a pour argument $n\dfrac{\pi}{4}$ (argument d'un produit).

Les points O, A et M_n sont alignés si et seulement si l'argument de l'affixe de M_n est $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\pi+\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près.



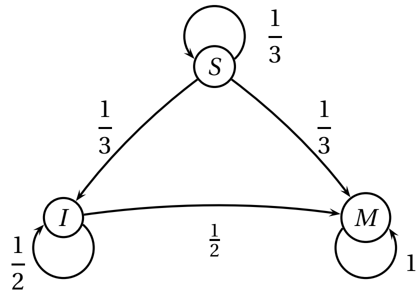
On suppose que $n-1$ est divisible par 4 ; le nombre $n-1$ peut alors s'écrire $4k$ avec k entier et donc n s'écrit $4k+1$.
L'argument de l'affixe de M_n qui est $n\dfrac{\pi}{4}$ peut s'écrire $(4k+1)\dfrac{\pi}{4} = k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ qui est bien équivalent à $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\pi+\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près ; donc si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
La proposition est vraie.

5. Le nombre j a pour module 1 et argument $\dfrac{2\pi}{3}$ donc j^2 a pour module $1^2 = 1$ et pour argument $2\times\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

On a : $\mathrm{j} = \cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (propriétés du cercle trigonométrique).
Et : $\mathrm{j}^2 = \cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.
La proposition est vraie.

Une solution plus élégante consiste à écrire le nombre j sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ pour prouver que $\mathrm{j}^3 = 1$. Ensuite on développe $\left(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right)(1-\mathrm{j})$ en $1-\mathrm{j}^3$ qui donne donc 0. Et comme j n'est pas égal à 1, le facteur $1-\mathrm{j}$ n'est pas nul, mais comme le produit $\left(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right)(1-\mathrm{j})$ est nul, c'est le facteur $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2$ qui est nul.

EXERCICE 4 : SPÉCIALITÉ **5 points**



On note $P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n)$ la matrice ligne .
On a alors $P_0 = (0,99 \quad 0 \quad 0,01)$ et pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{array}\right.$$

1. La matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel
 – sur la première ligne de A ce sont les probabilités conditionnelles sachant qu'à la semaine donnée, l'individu est dans l'état S, de passer
 • pour $A_{1,1}$ à l'état S, c'est selon le graphique $\frac{1}{3}$, ou par le calcul et le texte, c'est $1-2\frac{1}{3}$
 • pour $A_{1,2}$ à l'état I, c'est selon le graphique $\frac{1}{3}$, ou par le texte , c'est $\frac{1}{3}$;
 • pour $A_{1,3}$ à l'état SM, c'est selon le graphique $\frac{1}{3}$, ou par le calcul et le texte, c'est $\frac{1}{3}$.
 – sur la deuxième ligne de A ce sont les probabilités conditionnelles sachant qu'à la semaine donnée, l'individu est dans l'état I, de passer
 • pour $A_{2,1}$ à l'état S, c'est selon le graphique 0.
 • pour $A_{2,2}$ à l'état I, c'est selon le graphique $\frac{1}{2}$, ou par le texte idem ;
 • pour $A_{2,3}$ à l'état SM, c'est selon le graphique $\frac{1}{2}$, ou par le texte idem.
 – sur la troisième ligne de A ce sont les probabilités conditionnelles sachant qu'à la semaine donnée, l'individu est dans l'état M, de passer
 • pour $A_{3,1}$ à l'état S, c'est selon le graphique 0, ou en réfléchissant, s'il est malade il ne peut pas devenir sain ;
 • pour $A_{3,2}$ à l'état I, c'est selon le graphique 0 ;
 • pour $A_{3,3}$ à l'état SM, c'est selon le graphique 1, ou par le texte idem.

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; on a bien

$\begin{pmatrix} s_n & i_n & m_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}s_n & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{n+1} & i_{n+1} & m_{n+1} \end{pmatrix}$

$P_{n+1} = P_n \times A$.

2. Par récurrence, prouvons que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.
Pour $n = 1$ c'est dire que $P_1 = P_0 \times A$ ce qui est vrai (appliquer Aà P_0 permet de passer de P_0 à P_1).
Hérédité : supposons qu'il existe un entier n tel que $P_n = P_0 \times A^n$, alors multiplions les deux membres à droite par A c'est possible car P_n est de format (1 ; 3) et A de format (3 ; 3) donc les deux membres sont bien de format (1 ; 3), on obtient $P_n A = (P_0 A^n) \times A$, donc $P_n A = P_0(A^n \times A)$; par associativité du produit de matrices ;
et enfin $P_n A = P_0 A^{n+1}$
et du côté gauche c'est P_{n+1}, donc $P_{n+1} = P_0 A^{n+1}$.
L'hérédité est prouvée et donc pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. $P_4 = P_0 A^4$.
Pour calculer correctement A^4 on peut remarquer que $6A$ est à coefficients entiers.
La calculatrice donne :

$$(6A)^4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^4 .$$

$(6A)^4 = \begin{pmatrix} 16 & 130 & 1150 \\ 0 & 81 & 1215 \\ 0 & 0 & 1296 \end{pmatrix}$ donc $A^4 = \begin{pmatrix} \frac{16}{1296} & \frac{130}{1296} & \frac{1150}{1296} \\ 0 & \frac{81}{1296} & \frac{1215}{1296} \\ 0 & 0 & \frac{1296}{1296} \end{pmatrix}$

et en la multipliant à gauche par la matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 0,99 & 0 & 0,01 \end{pmatrix}$ on obtient

$$P_4 = \begin{pmatrix} \frac{15,84}{1296} & \frac{128,7}{1296} & \frac{1\,151,46}{1296} \end{pmatrix}$$

donc :

$P_4 = \begin{pmatrix} 0,012\,222... & 0,099\,305\,55... & 0,888\,472\,22... \end{pmatrix}$ donc en arrondissant à 10^{-2} :

$P_4 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,10 & 0,89 \end{pmatrix}$ (comme donné avant B. 1.).

$S_4 \simeq 0,01$, il y a un pourcentage de chance qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines.

Partie B

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$Q_n = (S_n \quad I_n \quad M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$.

1. On fait $Q_n \times B$ c'est $(S_n \quad I_n \quad M_n) \times \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c'est Q_{n+1}, donc

$Q_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}M_n & \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}M_n & \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} S_{n+1} & = & \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}S_n \\ I_{n+1} & = & \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}S_n \\ M_{n+1} & = & \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{array}\right.$$

2. Pour faire des calculs sur des entiers on calcule $(12B)^2$:

$(12B) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ et alors

$$\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $(12B)^2 = 48J$, $144B^2 = 48J$ donc $B^2 = \frac{1}{3}J$

Comme on peut par calcul prouver que $B^3 = B^2$, on peut par récurrence prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on a $B^n = B^2 = \frac{1}{3}J$

3. **a.** On peut montrer, comme dans la partie A que

[pour tout $n \in \mathbb{N}, Q_{n+1} = Q_n \times B$] $\Longrightarrow$ [pour tout $n \in \mathbb{N}, Q_n = Q_0 \times B^n$]

Si $n \geq 2$, $Q_n = Q_0 \times B^n$ et comme $B^n = B^2$,on a $Q_n = Q_0 \times B^2$, donc $Q_n = Q_2$, on calcule Q_2 en faisant $Q_0 \times (\frac{1}{3}J)$ c'est aussi $\left(\frac{1}{3}\right)(Q_0 \times J) = \left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 0,01+0,1+0,89 & 0,01+0,1+0,89 & 0,01+0,1+0,89 \end{pmatrix}$, donc $Q_n = \left(\frac{1}{3}\right)(Q_0 J) = \left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. Finalement on peut dire qu'avec ce vaccin l'évolution de la maladie va donner des groupes équitablement répartis : autant de chance d'être malade ou sain ou infecté ; le vaccin n'éradique pas la maladie. (cependant sans vaccin, on pourrait montrer que la répartition limite serait : tous malades ...)