

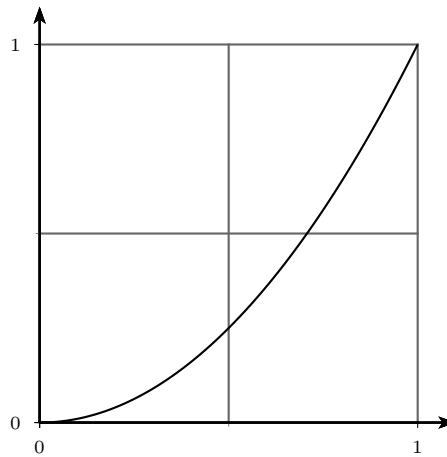
Aire sous la courbe et méthode des rectangles

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormée du plan. Pour tout entier n , $n \geq 2$, on partage l'intervalle $[0; 1]$ en n sous-intervalles de même longueur.

Cas $n=2$

On considère les fonctions en escaliers m_2 et M_2 définies par :

$$m_2 = \begin{cases} f(0) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f(1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

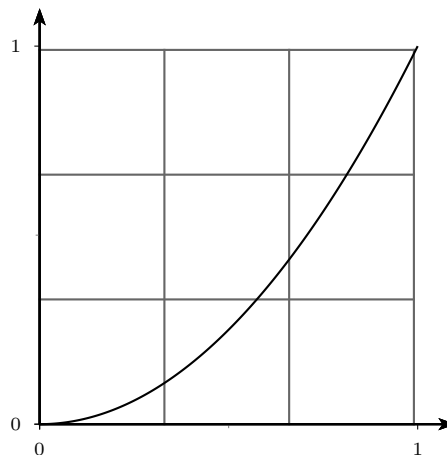


- Tracer les courbes de m_2 et M_2 sur $[0; 1]$.
- Montrer que $m_2(x) \leq f(x) \leq M_2(x)$ sur $[0; 1]$.
- Déterminer $I(m_2) = \int_0^1 m_2(x) dx$ et $I(M_2) = \int_0^1 M_2(x) dx$.
- En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x) dx$.

Cas $n=3$

On considère les fonctions en escaliers m_3 et M_3 définies par :

$$m_3 = \begin{cases} f(0) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ f\left(\frac{1}{3}\right) & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ f\left(\frac{2}{3}\right) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ f\left(\frac{2}{3}\right) & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ f(1) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



- Tracer les courbes de m_3 et M_3 sur $[0; 1]$.
- Déterminer $I(m_3)$ et $I(M_3)$
- En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x) dx$.

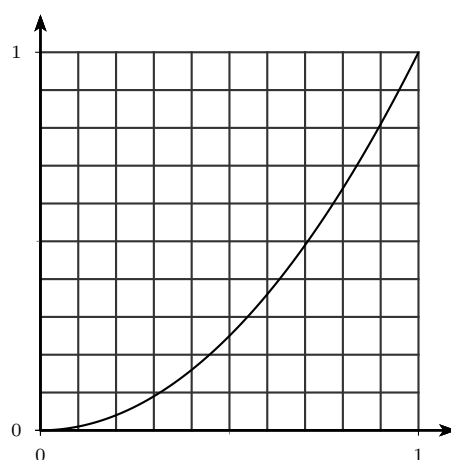
Cas général

On suppose n quelconque, $n \geq 2$. On appelle s_n la somme des aires des rectangles inférieurs donc

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

De même, on appelle S_n la somme des aires des rectangles supérieurs donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$



- Encadrer $\int_0^1 f(x) dx$ avec s_n et S_n pour tout entier n .
- Montrer que :

$$s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

- Montrer que :

$$S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

- Montrer que pour tout entier n ,

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- En déduire s_n et S_n en fonction de n .
- Conclure.