

Chapitre 10: Intégration

1 Primitive

1.1 Définition

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x de I ,

$$F'(x) = f(x)$$

Si elle existe, on note usuellement F la primitive d'une fonction f .

Exemple:

$(2x^2)' = 4x$ donc la fonction $F : x \mapsto 2x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 4x$

Théorème:

f est une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I .

- La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$, où k est un réel est aussi une primitive de f sur I .
- Toute primitive de f sur I est de la forme $F + k$.
- $x_0 \in I$ et y_0 un nombre réel. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = y_0$.

1.2 Primitives de fonctions usuelles

Propriété:

Dans le tableau ci-dessous figure la primitive la plus usuelle c'est à dire sans constante.

Fonction définie par $f(x) = \dots$	Une primitive de f est définie par $F(x) = \dots$	sur $I = \dots$
x^n où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{pour } n \geq 0 \\]-\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[& \text{pour } n \leq -2 \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

1.3 Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété:

- F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- F est une primitive de la fonction f sur I et k est un nombre réel alors $k \cdot F$ est une primitive de $k \cdot f$ sur I .

Propriété:

Dans le tableau ci-dessous u désigne une fonction dérivable sur I .

Fonction définie par $f(x) = \dots$	Une primitive de f est définie par $F(x) = \dots$	Conditions
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$u' \cdot u^n$ où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	pour $n \leq -2$, $u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$u'e^u$	e^u	aucune

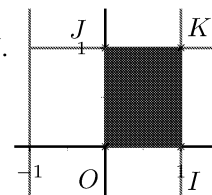
2 Intégration

2.1 Notion d'intégrale

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$, l'unité d'aire (U.A) est l'aire du rectangle $OIKJ$.

Dans la suite :

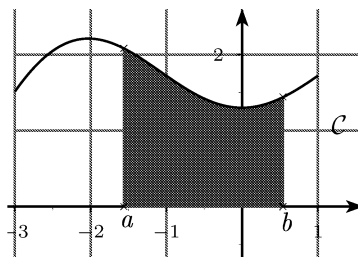
- toutes les courbes sont représentées dans un repère orthogonal ;
- toutes les aires sont données dans l'unité d'aire associée au repère.



Définition:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

L'intégrale de a à b de la fonction f , notée $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.



$\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)dx$ ».

Remarque:

La variable x n'a pas d'importance, on a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(q)dq$.

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

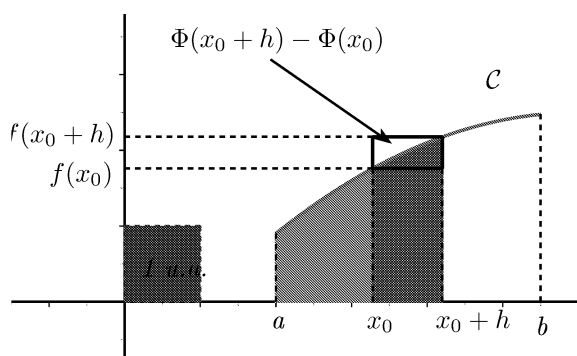
2.2 Intégrale d'une fonction continue et conséquences

Théorème:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$

Démonstration: (R.O.C.)

On se place dans le cas où f est croissante sur $[a; b]$. Soit x_0 et h deux nombres tels que $x_0 \in [a; b]$, $x_0 + h \in [a; b]$ et $h \neq 0$.



- Si $h > 0$, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$. De plus, $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$ exprime l'aire sous $\mathcal{C}$ sur $[x_0; x_0 + h]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$ d'où :

$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

et comme h est non-nul et positif, on obtient : $f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$

- Si $h < 0$, on démontre de la même manière que : $f(x_0 + h) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$

Par continuité de f en x_0 , on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Ainsi Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ pour tout réel x_0 de $[a; b]$ donc Φ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$

Corollaire:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors la fonction f admet une primitive Φ sur $[a; b]$ définie

par $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet des primitives sur $[a; b]$.

Démonstration: (R.O.C.)

On admet que toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet un minimum m et un maximum M .

Soit donc f une fonction continue sur $[a; b]$. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ sur $[a; b]$ donc la fonction $h(x) = f(x) - m$ est une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

D'après le théorème précédent, h admet une primitive Φ sur $[a; b]$, avec $\Phi'(x) = h(x)$.

Posons donc $F(x) = \Phi(x) + mx$.

F est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[a; b]$

Remarque:

On admettra que ce résultat peut s'étendre pour un intervalle quelconque I .

Théorème: (fondamental)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f .

Démonstration:

f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ donc $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est aussi une primitive de f sur $[a; b]$

donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \int_a^x f(t)dt + k$ sur $[a; b]$. De plus $F(a) = \int_a^a f(t)dt + k = k$ donc $k = F(a)$ donc

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a) \text{ soit } F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

2.3 Extension de la notion d'intégrale

On a défini l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et on démontré que si F est une primitive de f sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. On admet dans la suite du chapitre que cette formule s'étend au cas d'une fonction continue de signe quelconque sur $[a; b]$ et on pose la définition suivante :

Définition:

f est une fonction continue sur un intervalle I , F est une primitive de f sur I , a et b sont deux nombres quelconques de I .

L'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Remarque:

On note

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Exemple:

$x \mapsto 6x^2$ est une fonction continue sur $[-3; 4]$ donc $\int_{-3}^4 6x^2 dx = [2x^3]_{-3}^4 = 128 - (-54) = 182$

Propriété:

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ alors $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)dx$.

2.4 Linéarité de l'intégration**Théorème:**

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et λ un nombre réel :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Démonstration:

En exercice...

Corollaire:

Pour $a < b$, si $f \leq g$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Démonstration:

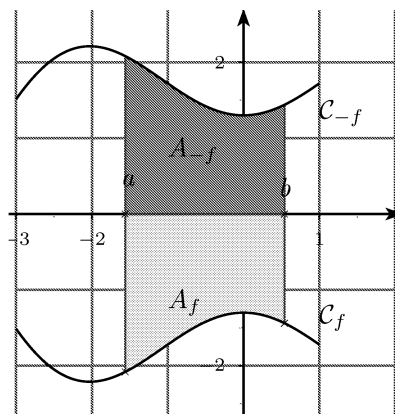
Considérons $f - g \geq 0$ par hypothèse donc $\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Remarque:

Attention, la réciproque est fausse.

Propriété:

Soit f une fonction continue et négative sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'opposé de l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe C .

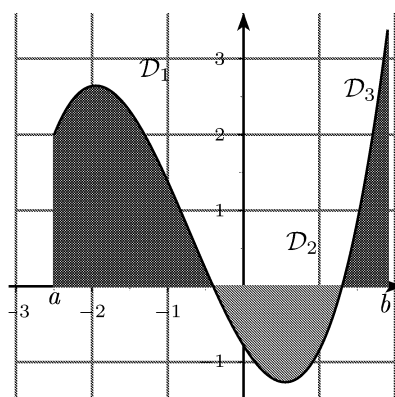


En effet, $-f$ est positive donc $\int_a^b -f(x)dx = A_{-f} = A_f$ et $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ donc $\int_a^b f(x)dx = -A_f$

Propriété:

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ (de signe quelconque) et C sa courbe représentative.

$\int_a^b f(x)dx$ est la somme des aires « algébriques » des domaines entre C et l'axe des abscisses.



Par exemple, sur la figure ci-dessus :

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}_{D_1} - \mathcal{A}_{D_2} + \mathcal{A}_{D_3}$$

Propriété:

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ tel que $g(x) \leq f(x)$ sur $[a; b]$ alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par C_f et C_g sur $[a; b]$ est définie par $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

2.5 Relation de Chasles

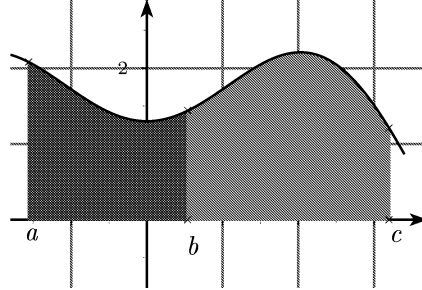
Propriété: (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur I et a, b, c trois réels de I alors

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Remarque:

Dans le cas où f est positive sur I et $a \leq b \leq c$, cette propriété est illustrée par le graphique ci-dessous :



Cependant la relation de Chasles est vraie quels que soient l'ordre des réels a, b, c et le signe de f .

2.6 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition: (Valeur moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Théorème: (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et soit m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour $x \in [a; b]$. On a alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

3 Intégration par parties

Propriété:

Soit u et v deux fonctions dérivables telles que u' et v' soit continues sur un intervalle $[a; b]$.

$$\text{On a } \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Exemple:

Calculons $\int_1^2 x^2 \ln(x)dx$.

Pour cela posons

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x^2 & v(x) &= \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Comme u' et v' sont continues sur $[1; 2]$, on peut utiliser la formule d'intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \ln(x)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3}dx \\ &= \left[\frac{8}{3} \ln(2) - 0 \right] - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} \ln(2) - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{8}{3} \ln(2) - \frac{7}{9} \end{aligned}$$