Intégrale d'une fonction continue

Exercice 1:

On considère une fonction f **continue et positive** sur $[a;b]$. On va démontrer que $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathtt{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$. Pour cela, on se place dans le cas particulier où f est croissante sur $[a;b]$.

1. Soit $x_0 \in [a;b]$ et h un réel non-nul tel que $x_0 + h \in [a;b]$.
   a. Pour $h > 0$, déterminer à quoi correspond
   $$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$$
   puis démontrer que :
   $$f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$
   b. Pour $h < 0$, déterminer à quoi correspond
   $$\Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h)$$
   puis démontrer que :
   $$f(x_0 + h) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$
2. En déduire que :
   $$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$
3. Conclure.

Exercice 2:

Démontrer que toute fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$ admet des primitives sur $[a;b]$.

On admettra que toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet un minimum m et un maximum M.

Exercice 3:

Montrer que si f une fonction **continue et positive** sur un intervalle I contenant a et b,

$$\int_a^b f(x)\mathtt{d}x = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f.

Exercice 4:

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^2 2x^3\mathtt{d}x$

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\mathtt{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2 + 6x - 4\mathtt{d}x$

d. $\displaystyle\int_1^2 \frac{5}{2\sqrt{x}}\mathtt{d}x$

e. $\displaystyle\int_1^e \frac{3}{x}\mathtt{d}x$

f. $\displaystyle\int_0^2 e^x - 3\mathtt{d}x$

g. $\displaystyle\int_{-4}^5 e^{-x}\mathtt{d}x$

h. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathtt{d}x$

i. $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t)\mathtt{d}t$

j. $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin(\theta)\mathtt{d}\theta$

k. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\mathtt{d}x$

l. $\displaystyle\int_1^2 1 - \frac{1}{x^2}\mathtt{d}x$

Exercice 5:

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+2)^2}\mathtt{d}x$

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3x+2}\mathtt{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3t+\pi)\mathtt{d}t$

d. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3t)\mathtt{d}t$

e. $\displaystyle\int_0^{e} \frac{-2}{x+1}\mathtt{d}x$

f. $\displaystyle\int_0^1 4e^{2x-3}\mathtt{d}x$

g. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{x}\mathtt{d}x$

h. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta)\cos(\theta)\mathtt{d}\theta$

i. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t)\mathtt{d}t$

j. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(t)}{t}\mathtt{d}t$

k. $\displaystyle\int_0^4 \frac{5}{\sqrt{x+5}}\mathtt{d}x$

l. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\mathtt{d}x$

Exercice 6:

Déterminer l'aire, en unités d'aire, comprise entre la courbe d'équation $y=-x^2+3x+4$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=4$.
On commencera par tracer la courbe dans un repère d'unité 1 cm et hachurer l'aire que l'on veut calculer.

Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2-e^{-\frac{1}{2}x}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, l'unité graphique est 2 cm.

1. Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.
2. On note $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{D}$ limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln(2)$.
   Calculer $\mathcal{A}$.